

# Εκτίμηση του Σφάλματος Φέρουσας σε Συστήματα OFDM

Διπλωματική Εργασία

Νίκου Ζαρόκωστα

Κατατέθηκε στο  
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών κ Δικτύων,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

προς εκπλήρωση των υποχρεώσεων για την απόκτηση πτυχίου

Ιούλιος 2005



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Γιώργο Μουστακίδη που μου έδωσε την ευκαιρία να μελετήσω κάποια από τα πολύ σημαντικά θέματα που άπτονται της θεωρίας των τηλεπικοινωνιών.

Οι παρατηρήσεις του ήταν μια αστείρευτη πηγή γνώσης και η καθοδήγησή του μοναδική. Οι ώρες που αφιερώσαμε στον άσπρο πίνακα του γραφείου του θα είναι πάντα αξιομνημόνευτες.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Γιώργο Ευθυβουλίδη για τις πολύτιμες διορθώσεις του στην εργασία.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.:	4511/1
Ημερ. Εισ.:	18-05-2006
Δωρεά:	Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ- ΜΗΥΤΔ
	2005
	ZAP

## Contents

<b>1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>4</b>
1.1 Τεχνολογία OFDM . . . . .	4
1.2 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	5
1.3 Οργάνωση της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	5
<b>2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ</b>	<b>7</b>
2.1 OFDM Πομποδέκτης . . . . .	7
2.2 Ανάλυση Συστήματος . . . . .	8
2.3 Επιπτώσεις Καναλιού . . . . .	12
2.4 Cyclic Prefix . . . . .	13
2.5 Zero Padding . . . . .	15
<b>3 ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΦΕΡΟΥΣΑΣ</b>	<b>17</b>
3.1 Διασυμβολική Παρεμβολή . . . . .	17
3.2 Ποσοτικοποιώντας την Διασυμβολική Παρεμβολή . . . . .	20
<b>4 ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΦΕΡΟΥΣΑΣ</b>	<b>22</b>
4.1 Virtual Carriers . . . . .	22
4.2 Training Symbols . . . . .	33
4.3 Cyclic Prefix . . . . .	37
4.4 Υπερ-δειγματοληψία . . . . .	42
<b>5 ΑΝΑΦΟΡΕΣ</b>	<b>46</b>
<b>6 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α</b>	<b>49</b>
<b>7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β</b>	<b>52</b>

# 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Τεχνολογία OFDM

Το OFDM είναι μια τεχνική μετάδοσης που χρησιμοποιεί πολλά φέροντα και που απολαμβάνει ολοένα και αυξανόμενη αποδοχή, μιας και έχει υιοθετηθεί σε πολλές εφαρμογές όπως το Digital Audio Broadcasting πρότυπο (DAB) [1] και το Digital Video Broadcasting-Terrestrial (DVB-T) [2], και τα δύο υλοποιημένα στην Ευρώπη. Το OFDM προσφέρει υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης, καταπολεμώντας συγχρόνως τα φαινόμενα της διασυμβολικής παρεμβολής του ασύρματου καναλιού και προσφέροντας αυξημένη χρήση του διαθέσιμου εύρους ζώνης.

Το OFDM χωρίζει το διαθέσιμο εύρος ζώνης σε υποφέροντα (που από εδώ και στο εξής θα ονομάζονται με την αγγλική τους ορολογία δηλ. subcarriers) και διαμορφώνει κάθε subcarrier με ένα σύμβολο δεδομένων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την μετάδοση ενός μπλοκ συμβόλων με καθένα σύμβολο σε διαφορετική συχνότητα. Παρόλα αυτά, αντίθετα με τα ισχύοντα στην πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM), τα subcarriers είναι πολύ κοντά τοποθετημένα στην συχνότητα (στην πραγματικότητα το φάσμα τους επικαλύπτεται) αλλά καταφέρνουν να μην αλληλοπαρεμβάλλονται, μιας και είναι ορθογώνια μεταξύ τους [3]-[6]. Μια λύση χαμηλής πολυπλοκότητας που εξασφαλίζει την ορθογωνιότητα είναι η χρήση των αρμονικών του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier (που από εδώ και στο εξής θα συμβολίζεται σαν DFT) ως subcarriers [7].

Για την προστασία από τα φαινόμενα την πολυδιαδρομικής διάδοσης (multi-path propagation) του ασύρματου καναλιού έχει εισαχθεί η ιδέα του guard interval. Η πολυδιαδρομική διάδοση συμβαίνει όταν ο δέκτης λαμβάνει πολλές εκδοχές του μεταδιδόμενου σήματος, με καθεμιά να έχει διαφορετική χρονική καθυστέρηση. Αν η καθυστέρηση είναι μικρή σε σχέση με την περίοδο του μπλοκ, τότε η χρήση του guard interval διορθώνει το φαινόμενο αυτό. Αν η καθυστέρηση είναι μεγαλύτερη, τότε προκύπτει διασυμβολική παρεμβολή (Inter-Block Interference (IBI)), κατά την οποία σύμβολα από διαφορετικά μπλοκ παρουσιάζονται στον δέκτη ταυτόχρονα.

Εφαρμογές που έχουν υιοθετήσει το OFDM είναι το DAB και το DVB-T, που καθιερώθηκαν από τον οργανισμό ETSI το 1995 και 1997 αντίστοιχα. Το DVB-T πρότυπο έχει την δυνατότητα παράδοσης υψηλής ευκρίνειας βίντεο σε ρυθμούς που φθάνουν τα 20Mbps. Σε ενσύρματες εφαρμογές, το OFDM έχει εφαρμοστεί στο Asynchronous Digital Subscriber Line (ADSL). Τέλος, για ασύρματα δίκτυα σε εσωτερικά περιβάλλοντα το

OFDM έχει υιοθετηθεί στο WLAN πρότυπο με ονομασία Hyperlan 2 το 1999.

Για ιστορικούς λόγους, πρέπει να αναφερθεί ότι η OFDM τεχνική μετάδοσης εφευρέθηκε από τον Robert Chang το 1966 και έγινε πατέντα το 1970 [8].

## 1.2 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας

Ένα από τα κύρια προβλήματα που αντιμετωπίζει το OFDM είναι η ευαισθησία του σε τυχόν σφάλμα φέρουσας (που από εδώ και στο εξής θα συμβολίζεται σαν CFO από τα αρχικά της αγγλικής του ονομασίας Carrier Frequency Offset). Αυτό το σφάλμα προκύπτει λόγω ατελειών στους τοπικούς ταλαντωτές του πομπού και του δέκτη και έχει σαν αποτέλεσμα τα subcarriers να μην είναι πλέον ορθογώνια μεταξύ τους [9], [10], κάτι που επιφέρει δραστική πτώση της απόδοσης του συστήματος. Έχει αποδειχθεί ότι για την διατήρηση του SNR σε επίπεδα άνω των 20 dB σε ένα σύστημα OFDM, το CFO πρέπει να είναι μικρότερο από το 4% της απόστασης μεταξύ δύο subcarriers [11], [12], κάτι που επιφέρει πολύ αυστηρές προδιαγραφές για τον τοπικό ταλαντωτή του δέκτη. Μιας και αυτοί οι δέκτες συνιστούν τα κινητά τερματικά πρέπει να κατασκευαστούν στο ελάχιστο δυνατό κόστος, με αποτέλεσμα η διόρθωση του CFO να μην συμφέρει να γίνεται τοπικά.

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η πλήρης κατανόηση της επίδρασης του CFO στο λαμβανόμενο σήμα, καθώς και η λεπτομερής ανάλυση των τεχνικών που έχουν προταθεί για εκτίμηση του σε συστήματα OFDM. Το κύριο ενδιαφέρον μας έγκνται σε μεθόδους τυφλής εκτίμησης, που δεν απαιτούν καθόλου (ή απαιτούν πολύ μικρό αριθμό από) γνωστά μεταδιδόμενα σύμβολα (pilot bits). Τελικός σκοπός μας είναι η σύγκριση των υπάρχοντων τεχνικών μέσα από εκτενείς προσομοιώσεις αλλά και η ανάπτυξη καινούριων τεχνικών εκτίμησης του CFO.

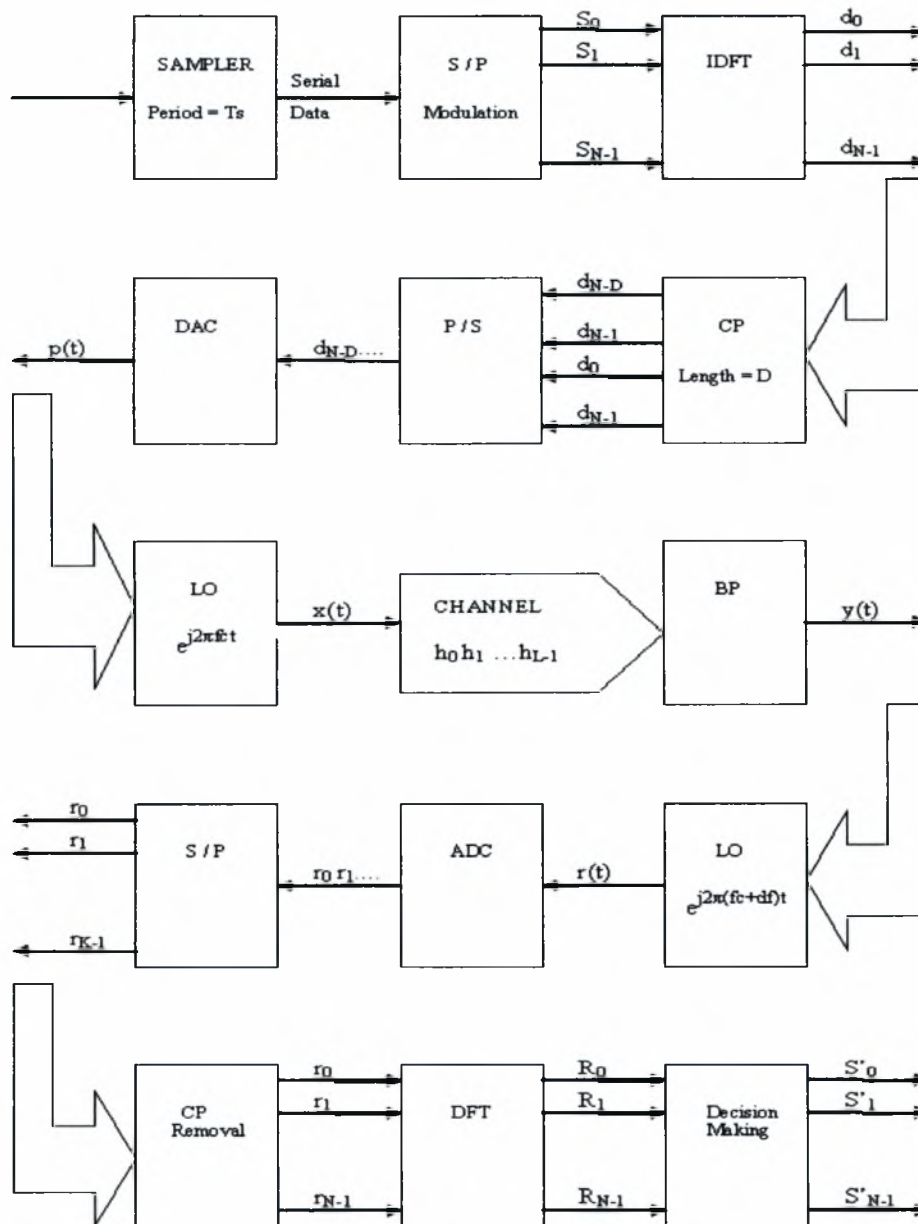
## 1.3 Οργάνωση της Διπλωματικής Εργασίας

Αρχικά θα παρουσιαστεί το μοντέλο του συστήματός μας μαζί με όλες τις προαναφερόμενες σημαντικές ιδιότητες και παραμέτρους του OFDM. Η δομή του πομπού και του δέκτη θα σχεδιαστεί και το κανάλι θα ληφθεί πλήρως υπ' όψιν. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μια θεωρητική ανάλυση του προβλήματος, ώστε να εξάγουμε την δομή του λαμβανόμενου σήματος όταν υπάρχει CFO. Η διασυμβολική παρεμβολή, σαν αποτέλεσμα της απώλειας της ορθογωνιότητας μεταξύ των subcarriers, θα ποσοτικοποιηθεί. Μετά από αυτό, θα

συνεχίσουμε με τις διάφορες λύσεις που έχουν δοθεί στο πρόβλημα και θα παρουσιάσουμε προσομοιώσεις που τις συγκρίνουν. Οι διάφοροι αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί για εκτίμηση του CFO μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες : data aided, που κάνει χρήση συμβόλων "εκπαίδευσης" (training symbols) εμφωλευμένων μέσα στο μεταδιδόμενο σήμα, non data aided, και βασιζόμενων στο cyclic prefix, που εκμεταλλεύεται την ύπαρξη κάποιων συγκεκριμένων συμβόλων στο μεταδιδόμενο σήμα. Τελικά, στο παράρτημα Α θα υπολογιστεί ο λόγος σήματος προς θόρυβο που χρησιμοποιείται για σωστές προσομοιώσεις και στο παράρτημα Β θα παρατεθεί ο κώδικας του MATLAB.

## 2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

### 2.1 OFDM Πομποδέκτης



## 2.2 Ανάλυση Συστήματος

Οι σημαντικές παράμετροι του συστήματος που πρέπει να τονισθούν είναι:

- i)  $T_s$  είναι η περίοδος των συμβόλων δεδομένων
- ii)  $N$  είναι ο αριθμός των subcarriers
- iii)  $T = NT_s$  είναι η περίοδος ενός OFDM συμβόλου
- iv)  $f_s = \frac{1}{T_s}$  είναι το διαθέσιμο εύρος ζώνης
- v)  $D_f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T}$  είναι το μεσοδιάστημα των subcarriers που από εδώ και στο εξής θα αναφέρεται με την αγγλική του ορολογία σαν subcarrier spacing.

Ας εξετάσουμε την δομή του λαμβανόμενου σήματος στην παρουσία CFO και καναλιού. Τα χρονικά δείγματα στην έξοδο της υπομονάδας IDFT αποτελούν τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier (που θα συμβολίζεται σαν IDFT) των συμβόλων δεδομένων. Δηλαδή,

$$d_i(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_m(n) e^{j \frac{2\pi}{N} m i}, \quad \text{για } i = 0, \dots, N-1$$

όπου  $d_i(n)$  είναι το  $i$  δείγμα του  $n$  μεταδιδόμενου μπλοκ. Έπειτα, για λόγους που εξηγούνται στην επόμενη παράγραφο, τα τελευταία  $D$  δείγματα αντιγράφονται στην αρχή του μπλοκ (περίπτωση που ονομάζονται cyclic prefix) ή  $D$  μηδενικά συνενώνονται στο τέλος του (περίπτωση που ονομάζονται zero padding), ώστε να σχηματίσουν το διακριτού χρόνου OFDM μεταδιδόμενο μπλοκ μήκους  $N + D = K$ . Σε μορφή πινάκων αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$d(n) = \begin{pmatrix} F_{cp}^H \\ F^H \end{pmatrix} S(n) \quad \text{ή} \quad d(n) = \begin{pmatrix} F^H \\ 0 \end{pmatrix} S(n)$$

όπου  $F^H$  είναι η μήτρα του IDFT,  $F_{cp}^H$  είναι οι τελευταίες  $D$  γραμμές του  $F^H$ ,  $d(n) = [d_0(n) \dots d_{N-1}(n)]^T$  και  $S(n) = [S_0(n) \dots S_{N-1}(n)]^T$ .

Παρόλα αυτά, το προς μετάδοση σήμα πρέπει να είναι μια αναλογική κυματομορφή. Γι αυτό, το μπλοκ περνάει από ένα μετατροπέα DAC που δίνει το συνεχούς χρόνου σήμα βασικής ζώνης

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-1} d_i(n) \phi(t - nKT_s - iT_s) \quad \text{όπου}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η μεταβλητή  $n$  υποδηλώνει το τρέχον μπλοκ και η  $i$  το τρέχον δείγμα. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι το  $\phi(t - nKT_s - iT_s)$  είναι ένα παράθυρο διάρκειας  $T_s$  στο χρονικό διάστημα που το τρέχον δείγμα μεταδίδεται.



Το  $p(t)$  περνά από τον τοπικό ταλαντωτή ώστε να προκύψει το τελικό προς μετάδοση σήμα

$$x(t) = e^{j2\pi f_c t} p(t)$$

Λόγω της πολυδιαδρομικής διάδοσης πολλά αντίγραφα του  $x(t)$  θα φθάσουν στο δέκτη, καθένα πολλαπλασιασμένο με ένα συντελεστή  $\tilde{h}_q$  και καθυστερημένο κατά ένα παράγοντα  $qT_s$ , όπου το  $q$  υποδηλώνει διαδρομή. Εδώ έχει γίνει η παραδοχή ότι η καθυστέρηση είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου  $T_s$ . Σε πρακτικά συστήματα, το  $T_s$  είναι εξαιρετικά μικρό οδηγώντας σε αρκετά ακριβείς προσεγγίσεις του παράγοντα καθυστέρησης. Από τα παραπάνω έχουμε ότι το λαμβανόμενο σήμα  $y(t)$ , αφού περάσει από ένα ζωνοπερατό φίλτρο ώστε να κοπούν οι ανεπιθύμητες συνιστώσες θορύβου σε γειτονικές συχνότητες, έχει την μορφή

$$y(t) = \sum_{q=0}^{L-1} \tilde{h}_q x(t - qT_s)$$

όπου  $L$  είναι ο αριθμός των διαφορετικών διαδρομών. Αναλύοντας το  $y(t)$  έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{q=0}^{L-1} \tilde{h}_q e^{j2\pi f_c (t - qT_s)} p(t - qT_s) \\ &= \sum_{q=0}^{L-1} \tilde{h}_q e^{j2\pi f_c t} e^{-j2\pi f_c T_s q} p(t - qT_s) \\ &= e^{j2\pi f_c t} \sum_{q=0}^{L-1} \tilde{h}_q e^{-j2\pi f_c T_s q} p(t - qT_s) \\ &= e^{j2\pi f_c t} \sum_{q=0}^{L-1} h_q p(t - qT_s) \end{aligned}$$

όπου  $h_q = \tilde{h}_q e^{-j2\pi f_c T_s q}$ . Περνώντας το λαμβανόμενο σήμα από τον τοπικό ταλαντωτή του δέκτη, προκύπτει το ενδιάμεσης συχνότητας σήμα

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-j2\pi (f_c + d_f)t} y(t) \\ &= e^{-j2\pi d_f t} \sum_{q=0}^{L-1} h_q p(t - qT_s) \end{aligned}$$

όπου  $d_f$  είναι το CFO σε Hz. Παίρνοντας το  $l$  δείγμα του  $m$  μπλοκ από το  $r(t)$  (υποθέτοντας ιδανική συχνότητα δειγματοληψίας  $T_s$ ) έχουμε

$$r((mK + l)T_s) = e^{-j2\pi d_f (mK + l)T_s} \sum_{q=0}^{L-1} h_q p((mK + l - q)T_s)$$

Ας συγκεντρωθούμε στον εκθετικό μιγαδικό όρο  $e^{-j2\pi d_f(mK+l)T_s}$ . Τότε

$$\begin{aligned} e^{-j2\pi d_f T_s(mK+l)} &= e^{-j2\pi d_f \frac{T_s}{N}(mK+l)} \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N} \frac{d_f T_s}{D_f}(mK+l)} \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N} \epsilon(mK+l)} \end{aligned}$$

όπου  $\epsilon$  είναι το κανονικοποιημένο CFO (δηλ. CFO διαιρεμένο με το subcarrier spacing).

Επομένως, τα λαμβανόμενα δείγματα έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} r((mK+l)T_s) &= e^{-j\frac{2\pi}{N}\epsilon(mK+l)} \sum_{q=0}^{L-1} h_q p((mK+l-q)T_s) \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N}\epsilon(mK+l)} \sum_{q=0}^{L-1} h_q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-1} d_i(n) \phi(((m-n)K + (l-i) - q)T_s) \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N}\epsilon(mK+l)} \sum_{q=0}^{L-1} h_q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-1} d_i(n) \delta((m-n)K + (l-i) - q) \end{aligned}$$

$$\text{όπου} \quad \delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } n = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Σαν αποτέλεσμα το  $r((mK+l)T_s) = 0$  όταν  $(m-n)K + (l-i) - q \neq 0$ . Για τα  $m, n, l, i, q$  ισχύει

$$\begin{aligned} 0 &\leq m, n < \infty \\ 0 &\leq l, i \leq K-1 \\ 0 &\leq q \leq L-1 \end{aligned}$$

Ας δουμε πότε  $(m-n)K + (l-i) - q = 0$ . Θα εξετάσουμε τις μοναδικές 4 περιπτώσεις για το  $n$ :

$n \geq m+1$ : Σε αυτή την περίπτωση το  $(m-n)K + (l-i) - q$  είναι αρνητικό και ο μόνος τρόπος να φθάσει το μηδέν είναι το  $(l-i)$  να πάρει την πιο θετική τιμή του, που είναι  $K-1$ . Τότε,  $(m-n)K + (l-i) - q \leq -K + K-1 - q$  και ο μόνος τρόπος για αυτό να γίνει μηδέν είναι  $q = -1$ , κάτι αδύνατο αφού  $0 \leq q \leq L-1$ .

$n \leq m-2$ : Τώρα το  $(m-n)K + (l-i) - q$  είναι θετικό και ο μόνος τρόπος για αυτό να φθάσει το μηδέν είναι το  $l-i$  να πάρει την πιο αρνητική του τιμή, που είναι  $-K+1$ . Τότε,  $(m-n)K + (l-i) - q \geq 2K - K + 1 - q$  και ο μόνος τρόπος για αυτό να γίνει μηδέν είναι  $q = K+1$ , κάτι που πάλι εναντιώνεται στην υπόθεσή μας.

$n = m$ : Στην περίπτωση αυτή  $(m-n)K + (l-i) - q = 0$  if  $i = l - q$ .

$n = m-1$ : Στην περίπτωση αυτή  $(m-n)K + (l-i) - q = 0$  if  $i = l + (K-q)$ .

Από τα παραπάνω μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση των λαμβανόμενων δειγμάτων σαν

$$\begin{aligned} r((mK+l)T_s) &= e^{-j\frac{2\pi}{N}\epsilon(mK+l)} \sum_{q=0}^{L-1} h_q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-1} d_i(n) \delta((m-n)K + (l-i) - q) \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N}\epsilon(mK+l)} \sum_{q=0}^{L-1} h_q [d_{l-q}(m) + d_{l+(K-q)}(m-1)] \quad \text{για } l = 0, \dots, K-1 \end{aligned}$$

μιας και μόνο αυτοί οι δύο όροι συνεισφέρουν μη μηδενικές τιμές στο  $r((mK+l)T_s)$  δείγμα. Το μιγαδικό εκθετικό μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων σαν

$$e^{-j\phi(mK)} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-j\phi 0} & & & \\ & e^{-j\phi 1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-j\phi(K-1)} \end{pmatrix}}_E$$

με  $\phi = \frac{2\pi}{N}\epsilon$ . Αναλύοντας το  $\epsilon$  έχουμε

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{2\pi}{N} \frac{d_f}{D_f} \\ &= \frac{2\pi}{N} d_f T \\ &= \frac{2\pi}{N} d_f N T_s \\ &= 2\pi d_f T_s. \end{aligned}$$

Στην πράξη είναι κοινό να θεωρείται το  $T_s = 1$  έτσι ώστε το κανονικοποιημένο sub-carrier spacing να είναι  $D_f = \frac{1}{N}$ . Αν αυτό ισχύει, τότε το  $\phi = 2\pi d_f$  αντιπροσωπεύει το CFO σε rad/sec.

Η υπόλοιπη εξίσωση μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων σαν

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h_0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ h_{L-1} & & \ddots & \\ & h_{L-1} & \dots & h_0 \end{pmatrix}}_H \underbrace{\begin{pmatrix} d_0(m) \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{K-1}(m) \end{pmatrix}}_{d(m)} + \underbrace{\begin{pmatrix} h_{L-1} & \dots & h_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & h_{L-1} \end{pmatrix}}_{H_{IBI}} \underbrace{\begin{pmatrix} d_0(m-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{K-1}(m-1) \end{pmatrix}}_{d(m-1)}$$

Συνοψίζοντας, το  $m$  λαμβανόμενο μπλοκ έχει την ακόλουθη δομή

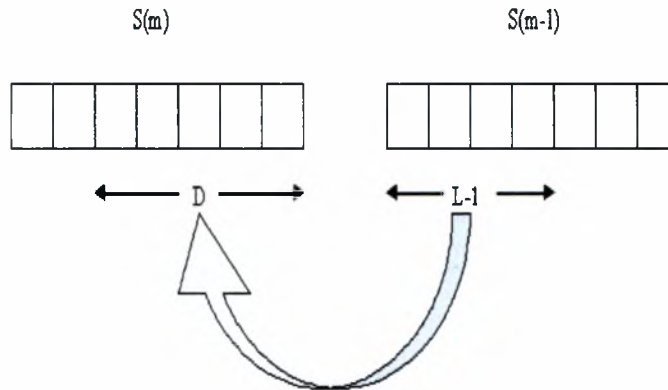
$$r(m) = e^{-j\phi(mK)} E \{ H d(m) + H_{IBI} d(m-1) \} \quad (1)$$

### 2.3 Επιπτώσεις Καναλιού

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τις επιπτώσεις του ασύρματου καναλιού στο λαμβανόμενο διάνυσμα. Από τα αποτελέσματα της εξίσωσης (1) καταλαβαίνουμε ότι το προηγούμενο OFDM block  $d(m-1)$  προστίθεται καταστροφικά στο τρέχον μπλοκ block  $d(m)$ . Αγνοώντας τους όρους που προκύπτουν από την παρουσία του CFO στην εξίσωση (1), τα ακόλουθα ισχύουν

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} r_0(m) \\ \vdots \\ r_{D-1}(m) \\ \vdots \\ r_{K-1}(m) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ h_{L-1} & & & \ddots \\ & & & & \ddots \\ & & & h_{L-1} & & h_0 \end{pmatrix}}_{H=\text{Toeplitz}} d(m) + \underbrace{\begin{pmatrix} & h_{L-1} & \dots & h_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & h_{L-1} \end{pmatrix}}_{H_{IBI}=\text{upper triangular}} d(m-1) \\
 &= \begin{pmatrix} a_0(m) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{K-1}(m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0(m-1) \\ \vdots \\ b_{L-2}(m-1) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Λόγω της δομής του  $H_{IBI}$ , τα τελευταία  $L-1$  δείγματα του  $d(m-1)$  προστίθενται στα πρώτα  $L-1$  δείγματα του  $d(m)$ ,



Γι αυτό το λόγο η χρήση του cyclic prefix ή του zero padding είναι απαραίτητη και το μήκος του  $D$  πρέπει πάντα να είναι μεγαλύτερο από το  $L-1$  (όπου  $L$  είναι η τάξη του καναλιού). Τώρα θα εξετάσουμε με ποιο τρόπο κάθε μια από τις δύο τεχνικές εξελείπει την διασυμβολική παρεμβολή.



Σαν αποτέλεσμα, όταν το CP απορρίπτεται από τον δέκτη ακυρώνεται η επίδραση της διασυμβολικής παρεμβολής και το λαμβανόμενο σήμα έχει την ακόλουθη μορφή

$$r(n) = Cd(n)$$

όπου  $d(n)$  είναι ο IDFT των συμβόλων δεδομένων. Έτσι

$$r(n) = CF^H S(n)$$

με  $F^H$  τη μήτρα του IDFT.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι κάθε κυκλικός πίνακας μπορεί να διαγωνοποιηθεί με πολλαπλασιασμό από αριστερά και δεξιά με τις μήτρες του FFT και IFFT αντίστοιχα [13], έχουμε

$$\begin{aligned} FCF^H &= D \Rightarrow \\ CF^H &= F^H D \end{aligned}$$

Η άνω ιδιότητα μπορεί να εφαρμοστεί στο λαμβανόμενο σήμα, δίνοντας τη τελική δομή του όταν το CP απορρίπτεται. Έχουμε

$$r(n) = F^H DS(n)$$

με τον  $D$  να έχει στην κύρια διαγώνιο τον μετασχηματισμό Fourier των συντελεστών του καναλιού.

Η ιδιότητα ενός κυκλικού πίνακα καναλιού  $C$  στο πεδίο του χρόνου ή ισodύναμα ενός διαγώνιου πίνακα καναλιού  $D$  στο πεδίο της συχνότητας έχει εξαιρετική σημασία στις τηλεπικοινωνίες, μιας και απλοποιεί τη μοντελοποίηση του καναλιού, καθώς και τις τεχνικές εκτίμησής του.

Στην περίπτωση παρουσίας CFO, απορρίπτοντας τα πρώτα  $D$  δείγματα του λαμβανόμενου μπλοκ σημαίνει ότι οι πρώτες  $D$  γραμμές του  $E$  πρέπει επίσης να απορριφθούν. Οι εναπομείναντες γραμμές του  $E$  συνιστούν ένα διαγώνιο πίνακα με πρώτο στοιχείο το  $e^{-j\phi D}$  και τελευταίο το  $e^{-j\phi(N+D-1)}$ . Είναι εύκολα αντιληπτό ότι ο όρος  $e^{-j\phi D}$  αποτελεί κοινό παράγοντα και επομένως μπορεί να βγει έξω από τον πίνακα. Παρόλα αυτά ο πίνακας καναλιού μπορεί ακόμα να θεωρείται κυκλικός, μιας και η παρουσία του  $E$  δεν επιδρά στην αλλαγή θέσης των συντελεστών  $h_1$  και  $h_2$  στο παραπάνω παράδειγμα. Επομένως στη περίπτωση παρουσίας CFO έχουμε

$$r(n) = e^{-j\phi(mK+D)} E F^H DS(n)$$

## 2.5 Zero Padding

Όταν χρησιμοποιείται η τεχνική ZP [13] δεν αντιγράφουμε τα τελευταία  $D$  δείγματα του μπλοκ στην αρχή. Αντί αυτού, τοποθετούμε στο τέλος του  $D$  μηδενικά. Στην περίπτωση απουσίας CFO, αυτό καταλήγει στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ h_{L-1} & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & h_{L-1} & \dots & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(m) \\ \vdots \\ d_{N-1}(m) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & h_{L-1} & \dots & h_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & h_{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(m-1) \\ \vdots \\ d_{N-1}(m-1) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

όπου οι όροι του  $H_{IBI}$  πολλαπλασιάζονται με μηδενικά, εξαλείφοντας την διασυμβολική παρεμβολή. Τα τελευταία  $D$  μηδενικά του  $d(m)$  θα διαγράψουν τις τελευταίες  $D$  στήλες του  $H$ . Επομένως

$$r(m) = \underbrace{\begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ h_{L-1} & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & h_{L-1} & \dots & h_0 \end{pmatrix}}_{H_0} d(m)$$

όπου ο  $H_0$  έχει  $N + D$  γραμμές και  $N$  στήλες. Οι πρώτες  $N$  γραμμές συνιστούν ένα Toeplitz πίνακα και οι τελευταίες  $D$  γραμμές έναν άνω τριγωνικό. Σε αυτήν την περίπτωση για να έχουμε ένα κυκλικό πίνακα καναλιού στο πεδίο του χρόνου, προσθέτουμε τα τελευταία  $D$  δείγματα του λαμβανόμενου μπλοκ στα πρώτα  $N$ , δηλαδή

$$\begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ h_{L-1} & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & h_{L-1} & \dots & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(m) \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{N-1}(m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & h_{L-1} & \dots & h_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & h_{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(m) \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{N-1}(m) \end{pmatrix} = Cd(m)$$

ή ισοδύναμα  $F^H DS(m)$ .



Στην περίπτωση παρουσίας CFO όμως, έχουμε από την (1)

$$\begin{aligned}
 r(m) &= e^{-j\phi Km} \begin{pmatrix} e^{-j\phi 0} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-j\phi(N+D-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ h_{L-1} & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & h_{L-1} & \dots & h_0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & h_{L-1} \end{pmatrix} d(m) \\
 &= e^{-j\phi Km} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_A \\ H_B \end{pmatrix} d(m) \\
 &= e^{-j\phi Km} \begin{pmatrix} EH_A d(m) \\ E_B H_B d(m) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

όπου  $E$ ,  $E_B$  είναι τα άνω αριστερά  $N \times N$  και κάτω δεξιά  $D \times D$  μπλοκ του αρχικού  $E$  αντίστοιχα και  $H_A$ ,  $H_B$  είναι οι πρώτες  $N$  και τελευταίες  $D$  γραμμές του  $H_0$  αντίστοιχα.

Αν τώρα προσθέσουμε τα τελευταία  $D$  δείγματα του  $r(m)$ , δηλ. τα  $E_B H_B d(m)$ , στα πρώτα  $N$ , δηλ. στα  $EH_A d(m)$ , πρέπει να επεκτείνουμε το  $E_B H_B d(m)$  με  $N - D$  μηδενικά έτσι ώστε οι δύο όροι να αποκτήσουν το ίδιο μέγεθος  $N$ . Επεκτείνοντας με μηδενικά το  $E_B H_B d(m)$  είναι ισοδύναμο με το να επεκτείνουμε με μηδενικά το  $H_B$  και να κάνουμε τον  $E_B$  διαγώνιο διάστασης  $N$ . Μιας και αυτά τα  $N - D$  τελευταία διαγώνια στοιχεία του  $E_B$  πολλαπλασιάζονται με τα τελευταία  $N - D$  μηδενικά του  $H_B$ , μπορούν να έχουν οποιαδήποτε τιμή. Δεν βλάπτει την γενικότητα να θεωρήσουμε ότι είναι τα  $e^{-j\phi(N+D)} \dots e^{-j\phi(2N-1)}$ .

Τότε

$$r(m) = e^{-j\phi Km} (EH_A d(m) + E_B H_B d(m))$$

όπου τα  $E_B$ ,  $H_B$  έχουν τροποποιηθεί κατάλληλα όπως προαναφέρθηκε. Όμως,  $E_B = z^{-N} E$ , κάτι που δίνει

$$r(m) = e^{-j\phi Km} E(H_A + z^{-N} H_B) d(m)$$

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι στην περίπτωση παρουσίας CFO, η ZP τεχνική δεν δίνει κυκλικό πίνακα καναλιού στο πεδίο του χρόνου.



### 3 ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΦΕΡΟΥΣΑΣ

#### 3.1 Διασυμβολική Παρεμβολή

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τις επιδράσεις του CFO και θα εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με το είδος της διαταραχής που το CFO προκαλεί στα μεταδιδόμενα σύμβολα.

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας με το να κατανοήσουμε τι συμβαίνει στο πεδίο της συχνότητας ενός OFDM συμβόλου όταν υπάρχει CFO.

Έχουμε ήδη δει ότι το σήμα βασικής ζώνης στο πεδίο του χρόνου έχει την ακόλουθη μορφή

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} d_i(n) \phi(t - nNT_s - iT_s)$$

αν το CP απορριφθεί. Η παραπάνω έκφραση αντιπροσωπεύει όλα τα μπλοκ, μιας και το  $n$  τρέχει από 0 έως  $\infty$ . Για να απομονώσουμε το μπλοκ  $m$  πολλαπλασιάζουμε το  $p(t)$  με ένα παράθυρο μήκους  $NT_s = T$ . Επομένως,

$$p_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} d_i(n) \phi(t - nT - iT_s) w(t - mT)$$

όπου

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Καθορίζοντας

$$z_n(t) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i(n) \phi(t - iT_s)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε το  $p_m(t)$  σαν

$$\begin{aligned} p_m(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t - nT) w(t - mT) \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t - nT) \right) w(t - mT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z_m(t - nT) w(t - mT) \end{aligned}$$

Αν  $P(jw)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier του  $p(t)$ , τότε

$$P(jw) = F\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} z_m(t - nT) \right\} * F\{w(t - mT)\}$$

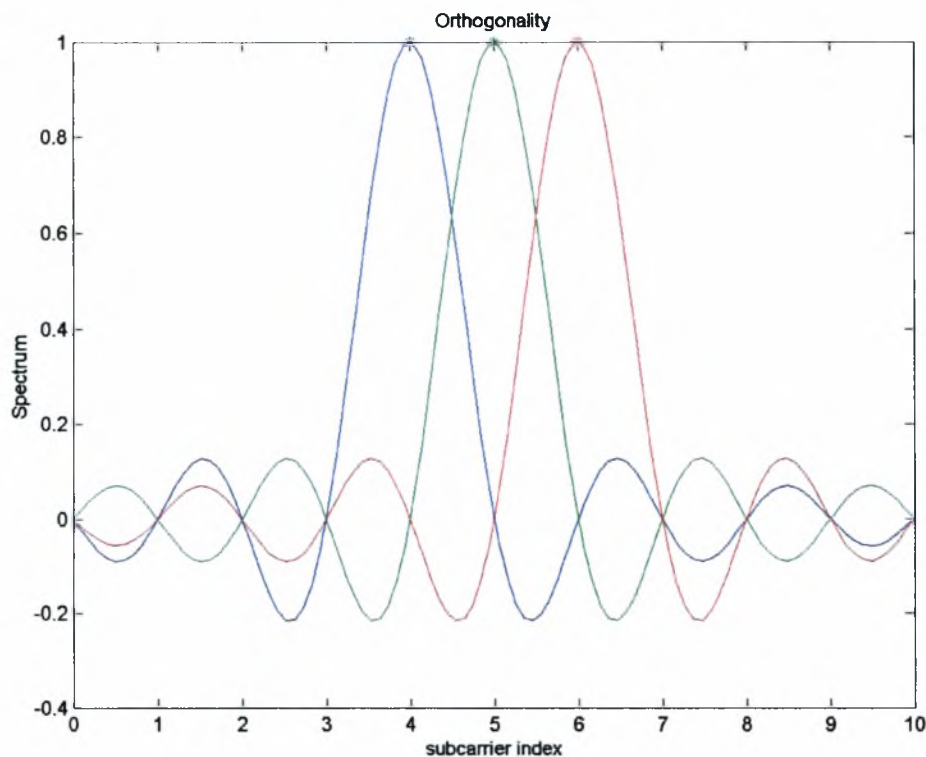
με  $*$  να υποδηλώνει την πράξη της συνέλιξης.

Το  $\sum_{n=0}^{\infty} z_m(t - nT)$  είναι ένα περιοδικό σήμα με περίοδο  $T$ . Είναι γνωστό ότι κάθε περιοδικό σήμα έχει μετασχηματισμό Fourier συναρτήσεις δελτα που εμφανίζονται σε ακέραια πολλαπλάσια του αντιστρόφου της περιόδου, δηλ.  $k\frac{1}{T}$  με  $k = 0, 1, \dots$  [31]. Επομένως,

$$F\left\{\sum_{n=0}^{\infty} z(t - nT)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$F\{w(t)\}$  είναι μια συνάρτηση sinc μιας και το  $w(t)$  είναι ένα ορθογώνιο παράθυρο. Επειδή το μήκος αυτού του παραθύρου είναι  $T$  η συνάρτηση sinc θα μηδενίζεται σε ακέραια πολλαπλάσια του  $\frac{1}{T}$ .

Συνελίσσοντας τους δύο μετασχηματισμούς Fourier έχουμε συναρτήσεις sinc τοποθετημένες σε ακέραια πολλαπλάσια του  $\frac{1}{T} = \frac{1}{NT_s}$  με τους μηδενισμούς τους στα ίδια πολλαπλάσια. Σαν αποτέλεσμα το φάσμα ενός OFDM μπλοκ θα αποτελείται από συναρτήσεις sinc όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα

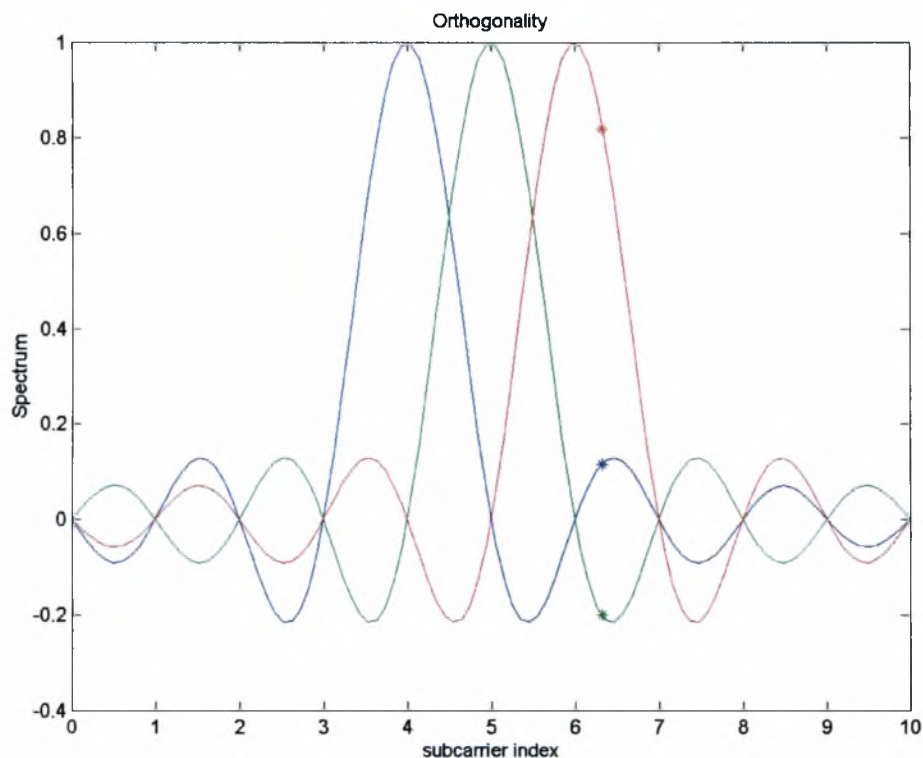


Υποθέτοντας ιδανικό ρυθμό δειγματοληψίας δεν έχουμε διασυμβολική παρεμβολή, μιας και όταν λαμβάνεται το δείγμα στο subcarrier  $i$  (\* στην κορυφή των sincs), όλα τα υπόλοιπα subcarriers συνεισφέρουν με μηδενικά (λόγω των περασμάτων από το μηδέν των συναρτήσεων sinc στα ακέραια πολλαπλάσια του  $\frac{1}{T}$ ).

Στην περίπτωση παρουσίας CFO, το λαμβανόμενο σήμα είναι

$$r(t) = e^{-j2\pi d_f t} p(t)$$

αγνοώντας το κανάλι. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier γνωρίζουμε ότι το φάσμα του  $r(t)$  θα είναι το ίδιο με αυτό του  $p(t)$ , με τη μόνη διαφορά ότι θα είναι ολισθημένο δεξιά κατά  $2\pi d_f$  Hz. Τα λαμβανόμενα δείγματα θα είναι επίσης ολισθημένα (\* στην επόμενη εικόνα).



Όπως υποδεικνύει το σχήμα, στην παρουσία CFO υπάρχει διασυμβολική παρεμβολή, μιας και τα υπόλοιπα subcarriers δεν συνεισφέρουν με μηδέν όταν λαμβάνεται το  $i$  δείγμα. Επομένως, το CFO είχε σαν αποτέλεσμα την απώλεια της ορθογωνιότητας [14],[15].

### 3.2 Ποσοτικοποιώντας την Διασυμβολική Παρεμβολή

Αφού οπτικοποιήσαμε την ύπαρξη CFO, αυτό που τώρα θέλουμε είναι να ποσοτικοποιήσουμε την διασυμβολική παρεμβολή και να την χειριστούμε χρησιμοποιώντας άλγεβρα. Αγνωώντας το κανάλι και υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει μηχανισμός διόρθωσης του CFO, έχουμε ήδη δει ότι το λαμβανόμενο σήμα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-j2\pi d_f t} p(t) \\ &= e^{-j2\pi d_f t} \sum_{i=0}^{N-1} d_i(m) \phi(t - mNT_s - iT_s) \end{aligned}$$

αν συγκεντρωθούμε μόνο στα σύμβολα δεδομένων του μπλοκ  $m$ . Μετά από ιδανική δειγματοληψία έχουμε

$$\begin{aligned} r((mN + n)T_s) &= e^{-j2\pi d_f n T_s} \sum_{i=0}^{N-1} d_i(m) \phi((n - i)T_s) \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N} n \epsilon} d_n(m) \\ &= r_n(m) \end{aligned}$$

μας και για  $i \neq n$ ,  $\phi((n - i)T_s) = 0$ . Το επόμενο βήμα είναι να αποδιαμορφώσουμε τα λαμβανόμενα σύμβολα με το να εφαρμόσουμε σε αυτά DFT, μιας και είχαν υποβληθεί σε IDFT στον πομπό.

$$\begin{aligned} R_k(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} r_n(m) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} d_n(m) e^{-j\frac{2\pi}{N} n \epsilon} e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} d_n(m) e^{-j\frac{2\pi}{N} (k + \epsilon)n} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην άνω σχέση ότι το  $d_n(m)$  είναι ο IDFT των συμβόλων δεδομένων  $S_i(m)$  έχουμε

$$\begin{aligned} R_k(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) e^{j\frac{2\pi}{N} in} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N} (k + \epsilon)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) e^{j\frac{2\pi}{N} (i - k - \epsilon)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j\frac{2\pi}{N} (i - k - \epsilon)}]^n \end{aligned}$$

Το δεύτερο άθροισμα αντιπροσωπεύει μια γεωμετρική σειρά. Επομένως

$$\begin{aligned}
 R_k(m) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(i-k-\epsilon)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(i-k-\epsilon)}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) \frac{1 - e^{j2\pi(i-k-\epsilon)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(i-k-\epsilon)}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) \frac{e^{j\pi(i-k-\epsilon)} e^{-j\pi(i-k-\epsilon)} - e^{j\pi(i-k-\epsilon)} e^{j\pi(i-k-\epsilon)}}{e^{j\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon)} e^{-j\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon)} - e^{j\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon)} e^{j\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon)}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) \frac{-e^{j\pi(i-k-\epsilon)} [e^{j\pi(i-k-\epsilon)} - e^{-j\pi(i-k-\epsilon)}]}{-e^{j\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon)} [e^{j\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon)} - e^{-j\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon)}]} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) e^{j\frac{N-1}{N}\pi(i-k-\epsilon)} \frac{\sin(\pi(i-k-\epsilon))}{\sin(\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon))} \tag{1}
 \end{aligned}$$

απομονώνοντας από το άθροισμα τον  $k$  όρο έχουμε

$$R_k(m) = \frac{1}{N} S_k(m) e^{-j\pi\frac{N-1}{N}\epsilon} \frac{\sin(\pi\epsilon)}{\sin(\frac{\pi}{N}\epsilon)} + \frac{1}{N} \sum_{i=0, i \neq k}^{N-1} e^{j\frac{N-1}{N}\pi(i-k-\epsilon)} \frac{\sin(\pi(i-k-\epsilon))}{\sin(\frac{\pi}{N}(i-k-\epsilon))} \tag{2}$$

όπου ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την επιθυμητή συνιστώσα και ο δεύτερος την διασυμβολική παρεμβολή (ή απώλεια της ορθογωνιότητας). Επομένως όλα τα subcarriers υπόκεινται στον ίδιο βαθμό εξασθένισης πλάτους και στρέξης φάσης, που δίνεται από

$$\frac{1}{N} \frac{\sin(\pi\epsilon)}{\sin(\frac{\pi}{N}\epsilon)} e^{-j\pi\frac{N-1}{N}\epsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}\epsilon n}$$

ένας παράγοντας γνωστός σαν Common Phase Error [16] [17].

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι όταν το  $\epsilon$  είναι ακέραιος (δηλ. το CFO είναι ένα πολλαπλάσιο του subcarrier spacing) δεν προκύπτει διασυμβολική παρεμβολή, μιας και ο δεύτερος όρος στην (2) εξαφανίζεται. Στην περίπτωση αυτή όμως, αποδιαμορφώνεται το λάθος subcarrier (δηλ.  $R_k(m) = \frac{1}{N} S_{k+\epsilon}$ ) όπως φαίνεται από την (1).

Για πληρότητα της ανάλυσής μας δείχνουμε ότι για ιδανικό τοπικό ταλαντωτή, δηλ. για  $\epsilon = 0$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 R_k(m) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) \frac{\sin(\pi(i-k))}{\sin(\frac{\pi}{N}(i-k))} e^{j\pi(i-k)\frac{N-1}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(m) N \delta(i-k) e^{j\pi(i-k)\frac{N-1}{N}} \\
 &= S_k(m)
 \end{aligned}$$

## 4 ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΦΕΡΟΥΣΑΣ

### 4.1 Virtual Carriers

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τις προτεινόμενες τεχνικές διόρθωσης του CFO, ξεκινώντας με τυφλές τεχνικές που δεν απαιτούν γνώση των μεταδιδόμενων συμβόλων ούτε του καναλιού.

Ο πρώτος αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί προτείνει την χρήση των virtual carriers. Virtual carriers αποκαλούνται τα subcarriers που δεν μεταφέρουν πληροφορία. Μπορούμε να τα σκεφτούμε σαν subcarriers που διαμορφώθηκαν με το σύμβολο μηδέν. Θα αναλύσουμε αυτήν την μέθοδο και για την τεχνική CP και για την ZP.

Ας υποθέσουμε ότι  $N$  είναι τα διαθέσιμα subcarriers και  $P$  είναι αυτά που μεταφέρουν πληροφορία, αφήνοντας  $N - P$  σαν virtual. Όπως έχουμε ήδη δει από την ανάλυση στην παράγραφο 2.4, το λαμβανόμενο σήμα στην περίπτωση του CP θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\tilde{Y}(k) = e^{-j\phi(mK+D)} E F D S(k)$$

όπου  $S(k)$  είναι τα σύμβολα δεδομένων,  $D$  ο διαγώνιος πίνακας καναλιού (διαγώνιος μιας και το cyclic prefix έχει απορριφθεί),  $F$  είναι η μήτρα του IDFT και  $E$  είναι ο CFO διαγώνιος πίνακας. Όμως στην περίπτωση αυτή επειδή τα τελευταία  $N - P$  σύμβολα του  $S(k)$  είναι μηδέν μπορούμε να ξαναγράψουμε την άνω σχέση σαν

$$\tilde{Y}(k) = e^{-j\phi(mK+D)} E F_P D_P S_P(k)$$

όπου  $S_P$  είναι τα μη μηδενικά σύμβολα και  $F_P$  είναι οι πρώτες  $P$  στήλες του  $F$ .

Η ιδέα αυτής της λύσης [18] είναι ότι οι στήλες του  $F$  είναι ορθοκανονικές, δηλ.

$$\langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

όπου  $f_i$  είναι η  $i$  στήλη του  $F$ . Επομένως το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $F_P$  είναι γνωστό a priori και αποτελείται από τις τελευταίες  $N - P$  στήλες του  $F$ , δηλ.  $[f_{P+1} \dots f_N]$ . Αυτό σημαίνει ότι αν  $Z \rightarrow E$  τότε  $f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y}(k) = 0$  μας και

$$\begin{aligned} f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y}(k) &= e^{-j\phi(mK+D)} f_{P+i}^H Z^{-1} E F_P D_P S_P(k) \\ &= e^{-j\phi(mK+D)} \underbrace{f_{P+i}^H F_P}_{0} D_P S_P(k) = 0, \quad i = 1, \dots, N - P \end{aligned}$$

Επομένως ψάχνουμε το  $Z^{-1}$  έτσι ώστε  $Z^{-1} Y \text{ spans } \{F_P\}$ , ή ισοδύναμα  $Z^{-1} Y \perp (f_{P+1} \dots f_N)$ .

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην συνάρτηση κόστους

$$\tilde{P}(z) = \sum_{i=1}^{N-P} \|f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y}\|^2 \quad (1)$$

με  $Z = \text{diag}(1, z, z^2 \dots z^{N-1})$ ,  $z = e^{-j\phi}$  και  $\tilde{Y}$  ένας πίνακας με  $K$  λαμβανόμενα διανύσματα σαν στήλες. Ο αλγόριθμος αποτιμά το πολυώνυμο  $P(z)$  για όλες τις δυνατές τιμές του  $\phi \in [0, 2\pi]$  και εκτιμά το CFO σαν τη φάση της ρίζας του  $P(z)$  που βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

Η συνάρτηση κόστους είναι ένα πολυώνυμο του  $z$  μιας και

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z) &= \sum_{i=1}^{N-P} \|f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N-P} (f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y})(f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y})^H \\ &= \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y} \tilde{Y}^H Z f_{P+i} \end{aligned}$$

Το  $(i, j)$  στοιχείο του πίνακα  $Z^{-1} \tilde{Y} \tilde{Y}^H Z$  είναι  $a(i, j) z^{j-i}$  με  $a(i, j)$  να είναι το  $(i, j)$  στοιχείο του πίνακα  $\tilde{Y} \tilde{Y}^H$ . Επομένως, ο  $Z^{-1} \tilde{Y} \tilde{Y}^H Z$  έχει το  $z^{-1}$  στην διαγώνιο  $-1$ ,  $z^0$  στην κύρια διαγώνιο,  $z^1$  στη διαγώνιο  $1$  κτλ. Σαν αποτέλεσμα, ο πίνακας  $Z^{-1} \tilde{Y} \tilde{Y}^H Z$  μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα υποπινάκων, με κάθε υποπίνακα να έχει στην  $j$  διαγώνιο την  $j$  διαγώνιο του  $Z^{-1} \tilde{Y} \tilde{Y}^H Z$ , αντιπροσωπεύοντας τον  $j$  συντελεστή του πολυωνύμου.

Το άνω σενάριο είναι ιδανικό, μιας και ο θόρυβος δεν έχει ληφθεί υπ' όψιν. Στην παρουσία θορύβου το λαμβανόμενο σήμα γίνεται

$$\begin{aligned} Y(k) &= e^{-j\phi(mK+D)} EFDS(k) + W(k) \\ &= \tilde{Y}(k) + W(k) \end{aligned}$$

όπου  $W(k)$  είναι μιγαδικός Προσθετικός Λευκός Γκαουσιανός Θόρυβος (AWGN) με μέση τιμή 0 και διασπορά  $\sigma^2$ .



Στην περίπτωση αυτή οι Liu και Tureli προτείνουν την εκτίμηση του CFO σαν την φάση της πιο κοντινής στον μοναδιαίο κύκλο ρίζας. Παρόλα αυτά η λύση αυτή δεν είναι σωστή. Η συνάρτηση κόστους μπορεί να γραφεί σαν

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \sum_{i=1}^{N-P} \|f_{P+i}^H Z^{-1} Y\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{N-P} \langle f_{P+i}^H Z^{-1} Y, f_{P+i}^H Z^{-1} Y \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} Y Y^H Z f_{P+i} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{K-1} Y(k) Y^H(k) \right] Z f_{P+i} \\
 &= K \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} \left[ \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Y(k) Y^H(k) \right] Z f_{P+i} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Το  $\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Y(k) Y^H(k)$  αποτελεί προσέγγιση της μήτρας συνδιασποράς του λαμβανόμενου διανύσματος  $Y(k)$ . Μάλιστα,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Y(k) Y^H(k) &= E\{Y(k) Y^H(k)\} \\
 &= E\{[\tilde{Y}(k) + W(k)][\tilde{Y}(k) + W(k)]^H\} \\
 &= E\{[\tilde{Y}(k) + W(k)][\tilde{Y}^H(k) + W^H(k)]\} \\
 &= E\{\tilde{Y}(k) \tilde{Y}^H(k) + \tilde{Y}(k) W^H(k) + W(k) \tilde{Y}^H(k) + W(k) W^H(k)\} \\
 &= E\{\tilde{Y}(k) \tilde{Y}^H(k) + W(k) W^H(k)\}
 \end{aligned}$$

μας και θόρυβος και πληροφορία είναι στατιστικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Y(k) Y^H(k) &= E\{\tilde{Y}(k) \tilde{Y}^H(k)\} + E\{W(k) W^H(k)\} \\
 &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{Y}(k) \tilde{Y}^H(k) + \sigma^2 I \\
 &= \frac{1}{K} \tilde{Y} \tilde{Y}^H + \sigma^2 I
 \end{aligned}$$



Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε

$$\begin{aligned}
 P(z) &= K \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} \left[ \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Y(k) Y(k)^H \right] Z f_{P+i} \\
 &= K \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} \left[ \frac{1}{K} \tilde{Y} \tilde{Y}^H + \sigma^2 I \right] Z f_{P+i} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} [\tilde{Y} \tilde{Y}^H + K \sigma^2 I] Z f_{P+i} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y} \tilde{Y}^H Z f_{P+i} + f_{P+i}^H Z^{-1} K \sigma^2 I Z f_{P+i} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1} \tilde{Y} \tilde{Y}^H Z f_{P+i} + K \sigma^2 \\
 &= \tilde{P}(z) + (N-P) K \sigma^2
 \end{aligned}$$

Αν  $\phi$  είναι το πραγματικό CFO και  $z = e^{-j\phi}$  τότε  $\tilde{P}(z) = 0$  αφήνοντας  $P(z) = (N-P) K \sigma^2$ . Επομένως, μας και το  $\tilde{P}(z)$  είναι μη αρνητικό (σαν άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων στην (1)) το CFO πρέπει να εκτιμηθεί σαν τη φάση εκείνου του  $z$  για το οποίο το  $P(z)$  παρουσιάζει ελάχιστο και όχι τη φάση της ρίζας του  $P(z)$  όπως προτείνεται από τους συγγραφείς του [18].

Μια άλλη λύση που επίσης χρησιμοποιεί την ιδέα των virtual carriers είναι αυτή που προτάθηκε από τον Chen [19], που κάνει χρήση του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας. Έστω  $x(k) = DS(k)$ . Τότε το λαμβανόμενο διάνυσμα γίνεται

$$\begin{aligned}
 y(k) &= EFx(k) + w(k) \\
 &= EF_P x_P(k) + w_P(k)
 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του λαμβανόμενου διανύσματος με παραμέτρους τα  $\phi$  και  $x(k)$  είναι

$$L(\phi, x(k)) = \frac{1}{(\pi \sigma^2)^N} e^{-\frac{1}{\sigma^2} (y(k) - EFx(k))^H (y(k) - EFx(k))}$$

Επομένως, η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας των  $\phi$  και  $x(k)$  είναι

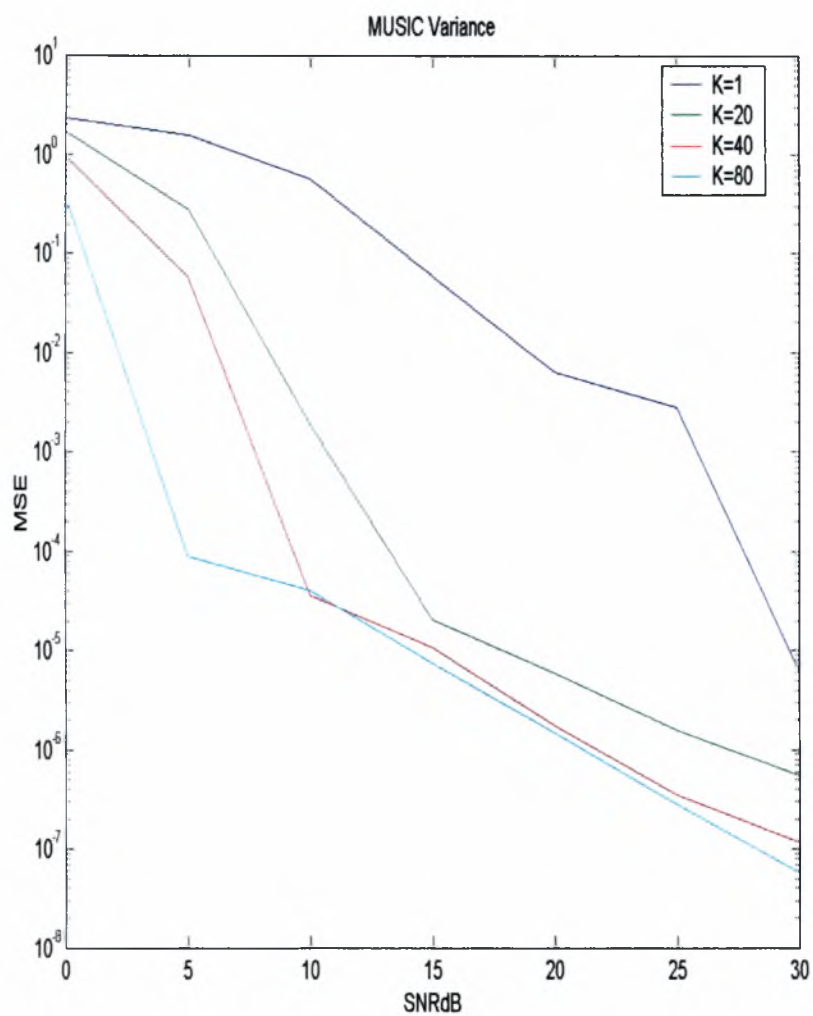
$$\begin{aligned}
 (\hat{\phi}, \hat{x}(k)) &= \arg \max_{\phi, x} L(\phi, x) \\
 &= \arg \min_{\phi, x} (y(k) - EFx(k))^H (y(k) - EFx(k)) \\
 &= \arg \min_{\phi, x} \|y(k) - EFx(k)\|^2 \\
 &= \arg \min_{\phi, x} S(\phi, x(k))
 \end{aligned}$$

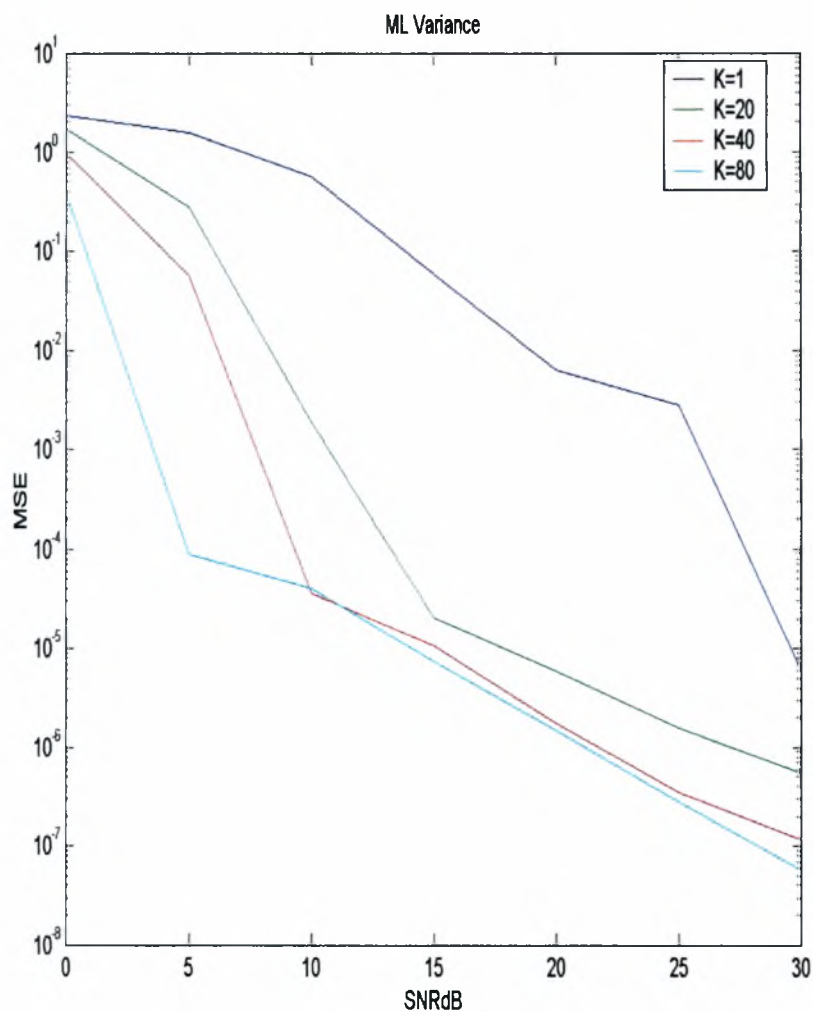
Το άνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης λύνεται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα υποθέτουμε δεδομένο  $\phi$  και βρίσκουμε το  $\hat{x}$  που ελαχιστοποιεί την  $S(\phi, x)$  (μηδενίζοντας την παράγωγο). Αντικαθιστώντας το  $\hat{x}(k)$  στην  $S(\phi, x(k))$  προκύπτει μια συνάρτηση κόστους ίδιας μορφής με αυτή που πρότειναν οι Tureli και Liu.

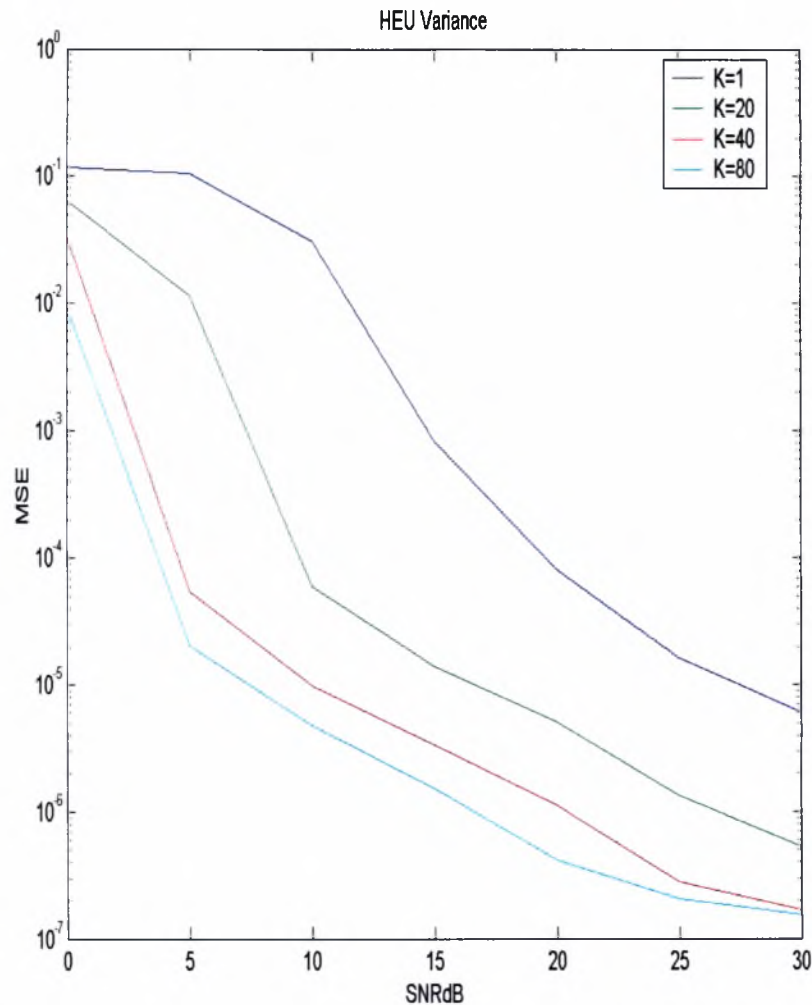
Η ισοδυναμία των δύο αλγορίθμων δικαιολογείται από την ορθογωνιότητα των virtual carriers και των subcarriers που μεταφέρουν πληροφορία. Έστω  $F_P$  οι πρώτες  $P$  στήλες του  $F$  και  $F_{N-P}$  οι τελευταίες  $N - P$  στήλες του  $F$ . Τότε  $F_P \perp F_{N-P}$ . Στον πρώτο αλγόριθμο ψάχνουμε το  $Z$  έτσι ώστε  $Z^{-1}x(k) = Fd(k) \in \text{span}\{F\}$ , που είναι ισοδύναμο με το να ψάξουμε το  $Z$  έτσι ώστε  $Z^{-1}x(k) \perp \text{span}\{F_{N-P}\}$  (μιας και ο υπόχωρος  $F_{N-P}$  είναι γνωστός a priori).

Στον αλγόριθμο μέγιστης πιθανοφάνειας θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση μεταξύ του λαμβανόμενου διανύσματος  $y(k)$  και το διανύσματος  $EF_P x_P(k) \in \text{span}\{EF_P\}$  (χωρίς γνώση του  $E$ ). Από την Αρχή της Ορθογωνιότητας γνωρίζουμε ότι ο καλύτερος αντιπρόσωπος για το  $x_P(k)$  είναι η προβολή του  $y(k)$  στον υπόχωρο  $\text{span}\{EF_P\}$  με το σφάλμα προβολής να είναι  $S(\phi, \hat{x}(k))$ . Επομένως, θέλουμε να διαλέξουμε το  $\phi \Rightarrow Z$  ώστε να δημιουργήσουμε έναν υπόχωρο  $\text{span}\{ZF_P\}$ , για τον οποίο το σφάλμα προβολής να είναι ελάχιστο. Σαν αποτέλεσμα, ψάχνουμε πάλι το  $Z$  έτσι ώστε η  $S(\phi, \hat{x})$  να ελαχιστοποιείται στον  $\text{span}\{ZF_P\}$  ή ισοδύναμα κάθετη στον  $\text{span}\{ZF_{N-P}\}$  (ξανά γνωστός εκ των προταίρων).

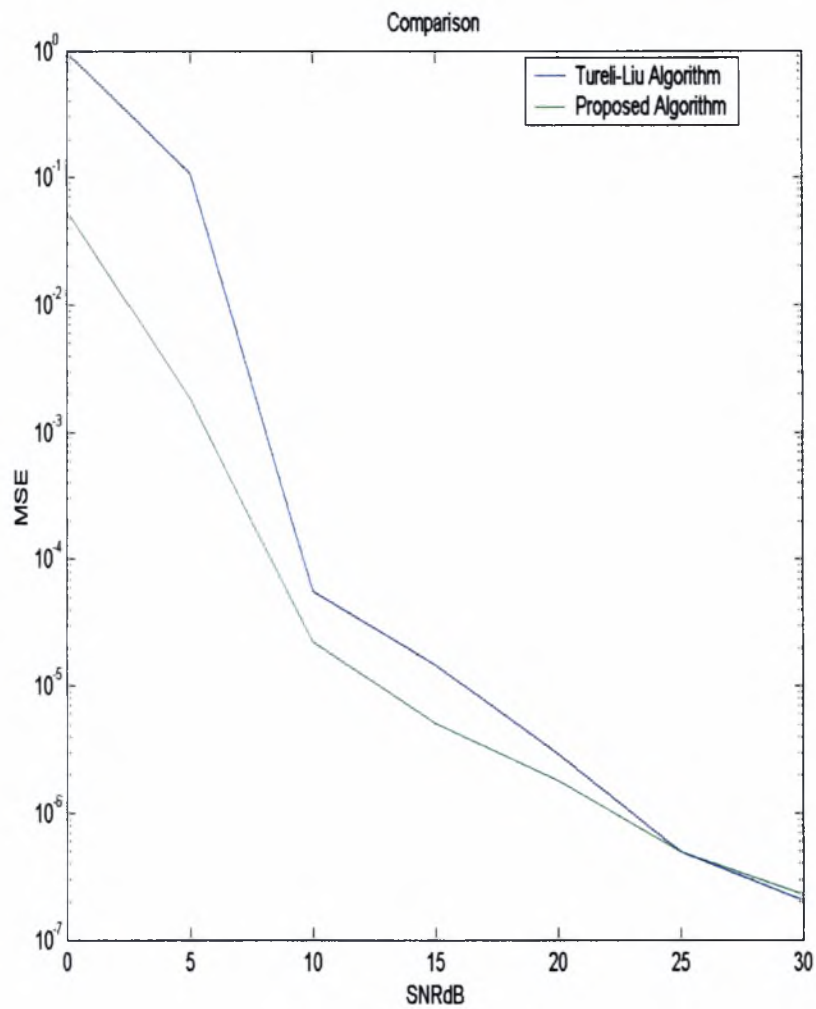
Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τις προσομοιώσεις των δύο αλγορίθμων και μια τρίτη, που είναι η διόρθωση που έγινε στον εκτιμητή των Tureli και Liu στην περίπτωση παρουσίας θορύβου. Στα σχήματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) του κάθε εκτιμητή σαν συνάρτηση του σηματοθορυβικού λόγου (SNR), για διάφορους αριθμούς διαθέσιμων παρατηρήσεων, μετά από 100 Monte Carlo προσομοιώσεις. Υποθέσαμε 32 subcarriers συνολικά και 12 virtual. Το CFO είναι 75% του subcarrier spacing.







Είναι ξεκάθαρο από τα αποτελέσματα ότι η διόρθωση που κάναμε στον αλγόριθμο των Tureli και Liu εμφανίζει καλύτερη συμπεριφορά από αυτή των άλλων δύο. Ο εκτιμητής μας είναι περίπου μια τάξη μεγέθους πιο ακριβής. Για του λόγου το αληθές, παρουσιάζουμε γραφική παράσταση που δείχνει το MSE του αλγορίθμου των Tureli-Liu και του προτεινόμενου αλγορίθμου όταν 20 παρατηρήσεις είναι διαθέσιμες.



Τώρα θα υποθέσουμε χρήση της τεχνικής ZP. Από όσο γνωρίζουμε, αυτή είναι η πρώτη φορά που το ZP εφαρμόζεται μαζί με τους αλγορίθμους που προηγούμενα περιγράφηκαν. Στην περίπτωση αυτή ψάχνουμε τον  $Z^{-1}$  έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} z^0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{-(N+D-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{N+D-1} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} z^0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & z^{-(N-1)} & \\ & & & \ddots \\ & & & & z^{-(N+D-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_0 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{N-1} \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{N+D-1} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} z^0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & z^{-(N-1)} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_0 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{N-1} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} z^{-N} & & & \\ & \ddots & & \\ & & z^{-(N+D-1)} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_N \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{N+D-1} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} z^0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & z^{-(N-1)} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_0 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{N-1} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} z^{-N} & & & \\ & \ddots & & \\ & & z^{-(2N-1)} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_N \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{N+D-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} Z^{-1}Y_A \\ z^{-N}Z^{-1}Y_B \end{pmatrix} \rightarrow (Z^{-1}Y_A + z^{-N}Z^{-1}Y_B) \perp [f_{P+1} \dots f_N]
 \end{aligned}$$

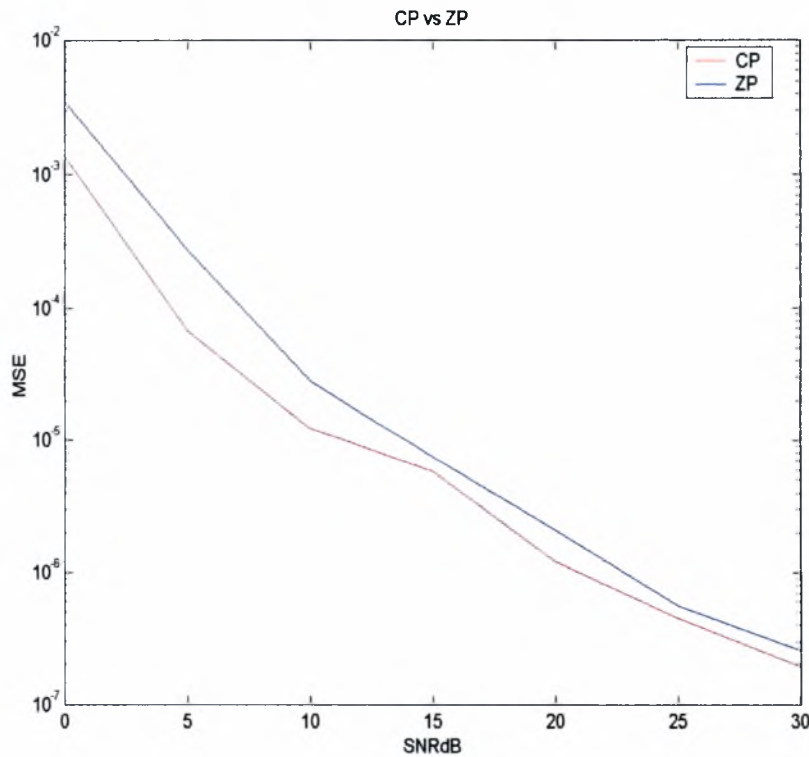
όπου  $Y_A$  είναι τα πρώτα  $N$  δείγματα και  $Y_B$  τα τελευταία  $N$ .

Τώρα η συνάρτηση κόστους γίνεται

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-P} \|f_{P+i}^H(Z^{-1}Y_A + z^{-N}Z^{-1}Y_B)\|^2 = \\ & \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H(Z^{-1}Y_A + z^{-N}Z^{-1}Y_B)(Y_A^H Z + z^N Y_B^H Z)f_{P+i} = \\ & \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H(Z^{-1}Y_A Y_A^H Z + z^N Z^{-1}Y_A Y_B^H Z + z^{-N}Z^{-1}Y_B Y_A^H Z + Z^{-1}Y_B Y_B^H Z)f_{P+i} = \\ & \sum_{i=1}^{N-P} f_{P+i}^H Z^{-1}Y_A Y_A^H Z f_{P+i} + \\ & f_{P+i}^H z^N Z^{-1}Y_A Y_B^H Z f_{P+i} + f_{P+i}^H z^{-N} Z^{-1}Y_B Y_A^H Z f_{P+i} + f_{P+i}^H Z^{-1}Y_B Y_B^H Z f_{P+i} \end{aligned}$$

που είναι πολυώνυμο του  $z$ , σαν άθροισμα πολυωνύμων του  $z$ .

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα προσομοίωσης που συγκρίνει το CP και το ZP, στην περίπτωση του προτεινόμενου αλγορίθμου όταν 20 λαμβανόμενα διανύσματα είναι διαθέσιμα.





## 4.2 Training Symbols

Μια δεύτερη προσέγγιση στη διόρθωση του CFO είναι η χρήση training symbols. Τα training symbols είναι σύμβολα γνωστά στο πομπό και στο δέκτη που διαμορφώνονται σε επίσης γνωστά subcarriers. Ο δέκτης εκμεταλλεύεται αυτή την πληροφορία ώστε να εκτιμήσει το CFO.

Ο πρώτος αλγόριθμος που προτάθηκε ήταν αυτός του Moose το 1994 [21]. Ο Moose προτείνει την επανάληψη της εκπομπής του κάθε μπλοκ και την σύγκριση των φάσεων των subcarriers μεταξύ διαδοχικών μπλοκ, μιας και στην περίπτωση αυτή το σφάλμα φέροντας δεν μπορεί παρά να οφείλεται στο CFO.

Η δομή του λαμβανόμενου μπλοκ παραμένει ίδια με αυτή που έχουμε ήδη δει, όμως η διαφορά αυτής της προσέγγισης είναι ότι η εκτίμηση του CFO γίνεται μετά την αποδιαμόρφωση.

Έστω  $r_n$  το λαμβανόμενο μπλοκ μήκους  $2N$ . Τότε

$$\begin{aligned} r_n &= EFDS \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} D_k S_k e^{j \frac{2\pi}{N} (k+\epsilon)n} \end{aligned}$$

Η παρατήρηση κλειδί είναι ότι  $r_{n+N} = e^{j2\pi\epsilon} r_n$ . Αποδιαμορφώνοντας τα πρώτα  $N$  σύμβολα έχουμε

$$R_{1k} = \sum_{n=0}^{N-1} r_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Αποδιαμορφώνοντας τα δεύτερα έχουμε

$$\begin{aligned} R_{2k} &= \sum_{n=N}^{2N-1} r_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} r_{n+N} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\epsilon} r_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= e^{j2\pi\epsilon} R_{1k} \end{aligned}$$

Με την παρουσία θορύβου έχουμε ότι τα δύο διαδοχικά αποδιαμορφωμένα μπλοκ θα δίνονται από

$$\begin{aligned} Y_{1k} &= R_{1k} + W_{1k} \\ Y_{2k} &= R_{2k} + W_{2k} \end{aligned}$$

Το γινόμενο  $Y_{1k}Y_{2k}^*$  δίνει

$$\begin{aligned} Y_{1k}Y_{2k}^* &= (R_{1k} + W_{1k})(e^{j2\pi\epsilon}R_{1k} + W_{2k})^* \\ &= (R_{1k} + W_{1k})(e^{-j2\pi\epsilon}R_{1k}^* + W_{2k}^*) \\ &= R_{1k}R_{1k}^*e^{-j2\pi\epsilon} + R_{1k}W_{2k}^* + W_{1k}R_{1k}^*e^{-j2\pi\epsilon} + W_{1k}W_{2k}^* \\ &= ||R_{1k}||^2e^{-j2\pi\epsilon} + R_{1k}W_{2k}^* + W_{1k}R_{1k}^*e^{-j2\pi\epsilon} + W_{1k}W_{2k}^* \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας στο  $Y_{1k}Y_{2k}^*$  μέσο όρο έχουμε

$$\begin{aligned} E\{Y_{1k}Y_{2k}^*\} &= E\{||R_{1k}||^2e^{-j2\pi\epsilon}\} + E\{R_{1k}W_{2k}^*\} + E\{W_{1k}R_{1k}^*e^{-j2\pi\epsilon}\} + E\{W_{1k}W_{2k}^*\} \\ &= e^{-j2\pi\epsilon}E\{||R_{1k}||^2\} \end{aligned}$$

μας και τα διαφορετικά δείγματα θορύβου είναι στατιστικώς ανεξάρτητα. Προσεγγίζοντας το μέσο όρο με την αριθμητική μέση τιμή έχουμε

$$\begin{aligned} E\{Y_{1k}Y_{2k}^*\} &= e^{-j2\pi\epsilon}E\{||R_{1k}||^2\} \Rightarrow \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_{1k}Y_{2k}^* &= e^{-j2\pi\epsilon} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} ||R_{1k}||^2 \Rightarrow \\ \sum_{k=0}^{N-1} Y_{1k}Y_{2k}^* &= e^{-j2\pi\epsilon} \sum_{k=0}^{N-1} ||R_{1k}||^2 \end{aligned}$$

Επομένως,  $E\{Y_{1k}Y_{2k}^*\}$  είναι μια μιγαδική μεταβλητή με φάση  $-2\pi\epsilon$ . Σαν αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος εκτιμά το CFO σαν

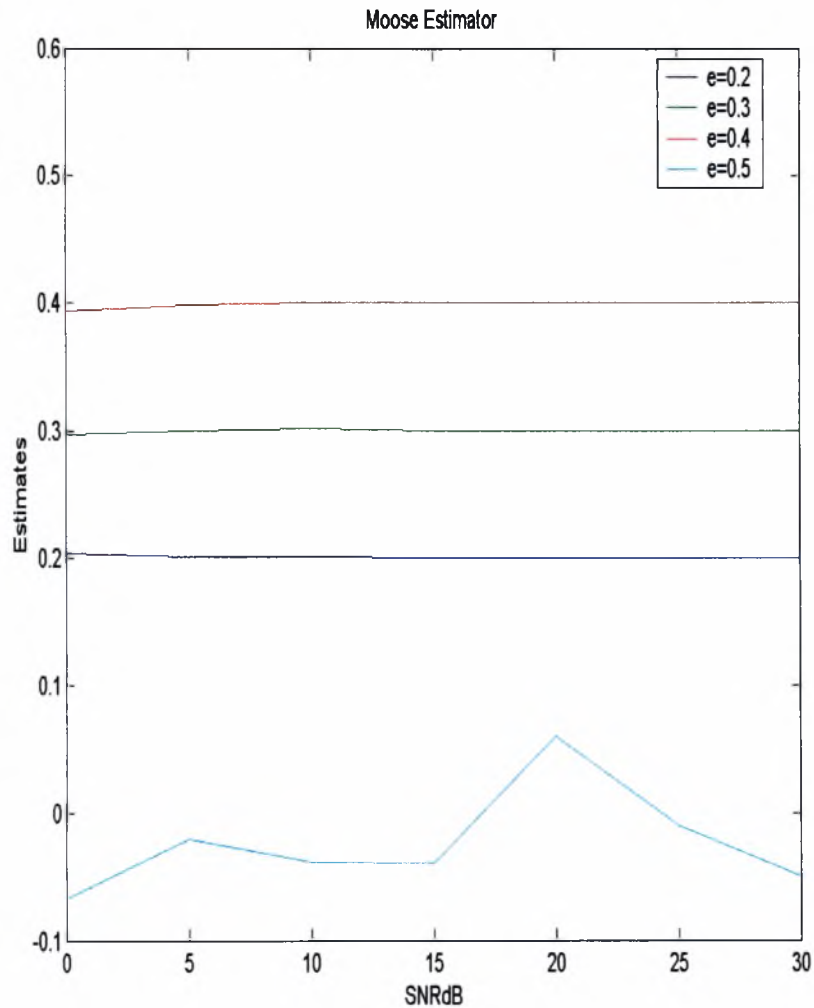
$$\hat{\epsilon} = -\frac{1}{2\pi} \angle \sum_{k=0}^{N-1} Y_{1k}Y_{2k}^*$$

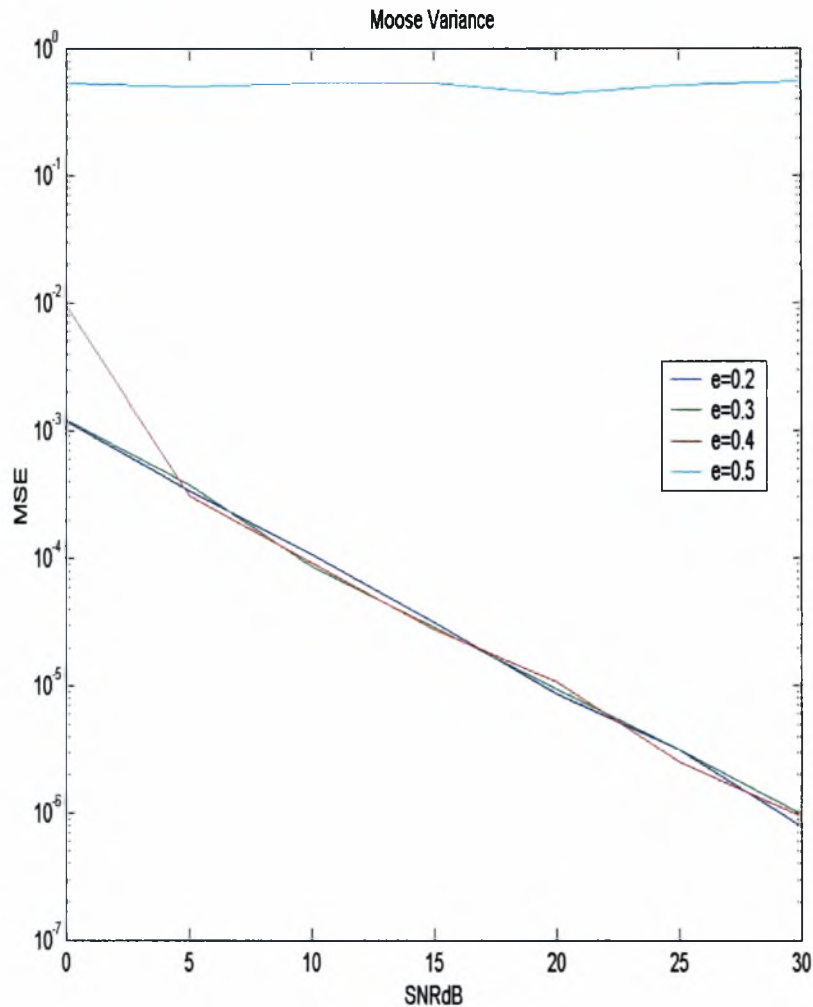
Παρόλα αυτά, ο αλγόριθμος έχει τον περιορισμό  $\frac{1}{2} < \epsilon < \frac{1}{2}$  λόγω της μορφής της  $\tan^{-1}$ , καθώς

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} &= -\frac{1}{2\pi} \angle \sum_{k=0}^{N-1} Y_{1k}Y_{2k}^* \\ &= -\frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}\{\sum_{k=0}^{N-1} Y_{1k}Y_{2k}^*\}}{\text{Re}\{\sum_{k=0}^{N-1} Y_{1k}Y_{2k}^*\}} \right\} \end{aligned}$$

και όσο  $\epsilon \rightarrow \frac{1}{2}$ , το  $\hat{\epsilon}$  μπορεί λόγω θορύβου και ασυνέχειας της αντίστροφης εφαπτομένης να μεταπηδήσει στο  $-\frac{1}{2}$ .

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που αποδεικνύουν την αποδεκτή συμπεριφορά του αλγορίθμου. Έχουμε υποθέσει 32 subcarriers και διάφορα CFO. Για  $\epsilon = \frac{1}{2}$  επιβεβαιώνουμε την αναμενόμενη λάθος συμπεριφορά.





Άλλες λύσεις που ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία είναι η [22] και [23].

Στην [22] οι συγγραφείς χρησιμοποιούν την δομή του OFDM πακέτου που έχει καθιερωθεί από τον οργανισμό προτυποποίησης IEEE 802.11 για OFDM ασύρματα τοπικά δίκτυα, ώστε να διορθώσουν το CFO με χρήση του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας.

Στο [23] οι συγγραφείς κατασκευάζουν την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων των λαμβανόμενων συμβόλων.

### 4.3 Cyclic Prefix

Το cyclic prefix είναι το πλεόνασμα που εμφωλεύεται στο μεταδιδόμενο μπλοκ για να εξαληφθεί η διασυμβολική παρεμβολή εξαιτίας της πολυδιαδρομικής διάδοσης. Έχουμε ήδη δει ότι μετά την διαμόρφωση των συμβόλων δεδομένων με χρήση του IDFT, τα τελευταία  $D$  σύμβολα αντιγράφονται στην αρχή του μεταδιδόμενου μπλοκ. Αυτά τα  $D$  σύμβολα συνιστούν το cyclic prefix, ένα υποχρεωτικό πλεόνασμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκτίμηση του CFO.

Οι Beek και Sandel [21], [22], [23] επεξεργάστηκαν την άνω ιδέα και πρότειναν τον εξής εκτιμητή

$$\hat{\epsilon} = -\frac{1}{2\pi} \angle \sum_{k=0}^{D-1} r_k r_{k+N}^*$$

Η ανάλυση για εξαγωγή του άνω εκτιμητή είναι παρόμοια με αυτή του Moose, δηλ. πρώτα παίρνουμε το  $r_k r_{k+N}^*$ , έπειτα βρίσκουμε το  $E\{r_k r_{k+N}^*\}$  και μιας και ο θόρυβος με την πληροφορία είναι στατιστικώς ανεξάρτητα προσεγγίζουμε το μέσο όρο με την αριθμητική μέση τιμή.

Παρόλα αυτά, στην δημοσίευσή τους χρησιμοποιούν ένα απλοποιημένο μοντέλο για το λαμβανόμενο διάνυσμα, με στοιχεία  $r_k$ ,

$$r_k = e^{j\frac{2\pi}{N}\epsilon k} s_k + w_k$$

αγνοώντας το κανάλι.

Το κανάλι στην περίπτωση που το CP δεν απορρίπτεται όχι μόνο δεν εμφανίζεται σαν ένας διαγώνιος πίνακας, αλλά δεν εξαλείφεται και η διασυμβολική παρεμβολή. Επιπλέον όταν οι μιγαδικοί συντελεστές του καναλιού πολλαπλασιάζονται με τα μεταδιδόμενα σύμβολα τότε

$$r_k = e^{j\frac{2\pi}{N}\epsilon k} h_k s_k + w_k$$

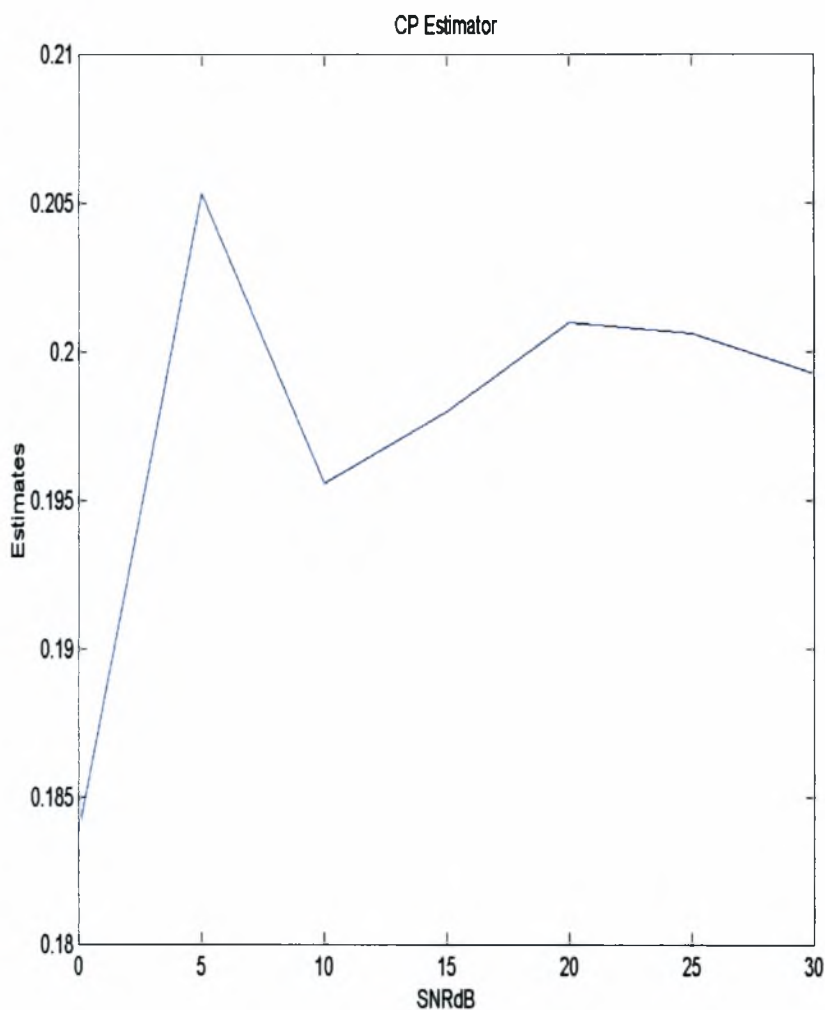
και

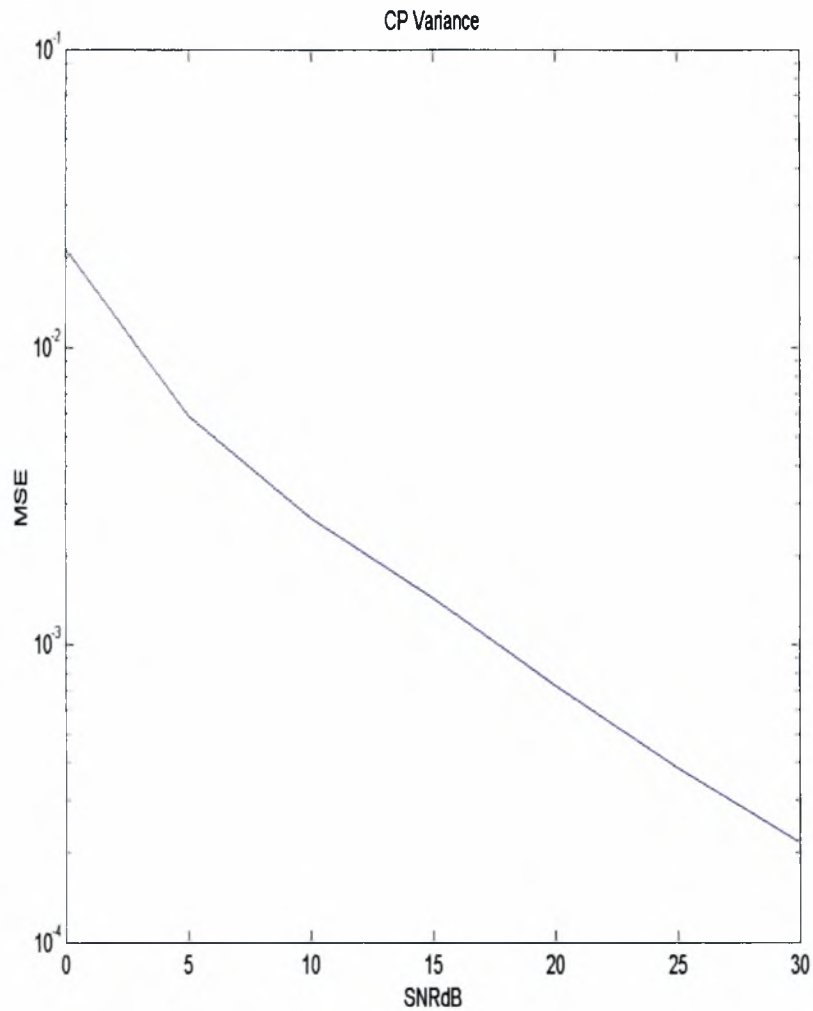
$$\sum_{k=0}^{D-1} r_k r_{k+N}^* = e^{-j2\pi\epsilon} \sum_{k=0}^{D-1} ||s_k||^2 h_k h_{k+N}$$

όπου γενικά  $h_k h_{k+N}$  είναι μια μιγαδική μεταβλητή που συνεισφέρει στη συνολική φάση του εκτιμητή.

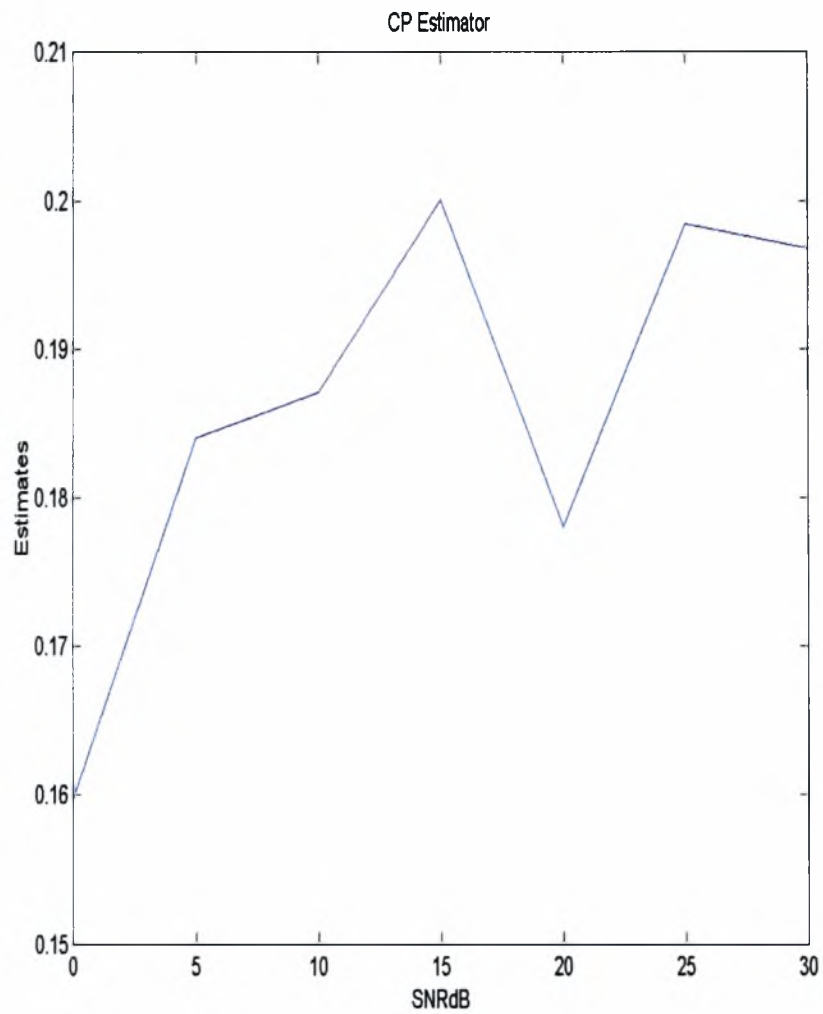
Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα δύο προσομοιώσεων, μιας χωρίς κανάλι και μιας δεύτερης λαμβάνοντας υπ' όψιν το κανάλι και την διασυμβολική παρεμβολή όπως αυτή αναλύθηκε στην παράγραφο 2.2. Για κάθε προσομοίωση παρατίθενται οι εκτιμήσεις και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα συναρτήσει του σηματοθορυβικού λόγου. Αναμένουμε η δεύτερη προσομοίωση να δώσει χειρότερα αποτελέσματα από την πρώτη.

Στην περίπτωση απουσίας καναλιού (και διασυμβολικής παρεμβολής) έχουμε

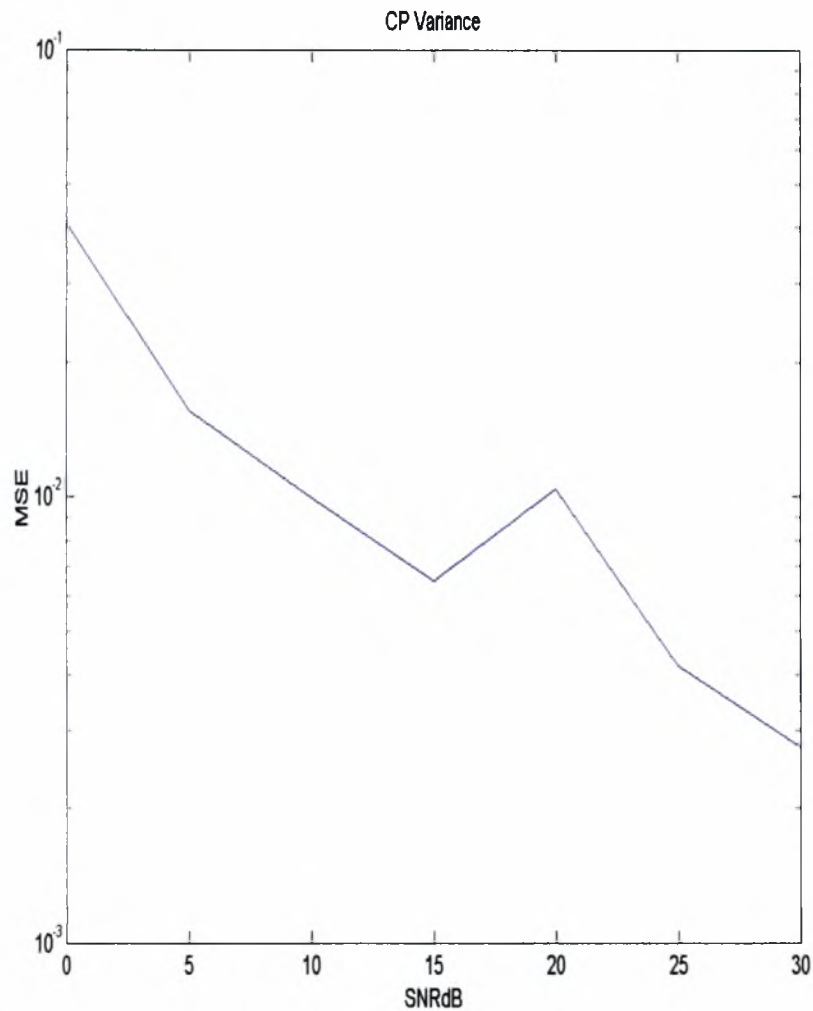




Στην περίπτωση που το κανάλι και η διασυμβολική παρεμβολή λαμβάνονται υπ' όψιν έχουμε







Από τις γραφικές παραστάσεις του μέσου τετραγωνικού σφάλματος είναι φανερό ότι στην περίπτωση που το κανάλι ληφθεί υπ' όψιν έχουμε μια αναμενόμενη μείωση της απόδοσης του προτεινόμενου αλγορίθμου.

#### 4.4 Υπερ-δειγματοληψία

Άλλη μια ενδιαφέρουσα μέθοδος που μπορεί να χαρακτηριστεί τυφλή είναι αυτή της υπερ-δειγματοληψίας [24]. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ομάδες συμβόλων προς μετάδοση, μία με σύμβολα προερχόμενα από τις χρονικές στιγμές  $nT_s$  και η άλλη από τις  $nT_s + \frac{T_s}{2}$ . Τότε μετά τον IDFT έχουμε

$$\begin{aligned} d_1(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \\ d_2(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j \frac{2\pi}{N} k(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (S_k e^{j \frac{\pi}{N} k}) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned}$$

που σε μορφή πινάκων γράφεται σαν

$$\begin{aligned} d_1 &= FS \\ d_2 &= FPS \end{aligned}$$

όπου  $P = \text{diag}(1 e^{j \frac{\pi}{N}} \dots e^{j \frac{(N-1)\pi}{N}})$ .

Επομένως, στην περίπτωση παρουσίας καναλιού και CFO, οι δύο λαμβανόμενες ομάδες συμβόλων θα δίνονται από

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} D_k S_k e^{j \frac{2\pi}{N} (k+\epsilon)n} + z_1(n) \\ x_2(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} D_k S_k e^{j \frac{2\pi}{N} (k+\epsilon)(n+\frac{1}{2})} + z_2(n) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} x_1 &= EFDS \\ x_2 &= e^{j \frac{\pi}{2}} EFPDS \end{aligned}$$

Έχοντας αυτά τα δύο διανύσματα για κάθε μεταδιδόμενο μπλοκ, ο Chen προτείνει τη δημιουργία των

$$\begin{aligned} y_1 &= F^H P^H x_1 \\ y_2 &= e^{-j \frac{\pi}{2}} P^H F^H E^H x_2 \end{aligned}$$

Σε περίπτωση απουσίας θορύβου ο αλγόριθμος ψάχνει το  $\phi \in [0, 2\pi]$  έτσι ώστε τα  $y_1$  και  $y_2$  να γίνουν όμοια. Στην περίπτωση παρουσίας θορύβου ο Chen υπολογίζει την πυκνότητα πιθανότητας σαν

$$L(\phi, \tilde{S}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [\|x_1 - EF\tilde{S}\|^2 + \|x_2 - e^{j\frac{\phi}{2}} EFP\tilde{S}\|^2]}$$

όπου  $\tilde{S} = DS$  και βρίσκει το όρισμα που μεγιστοποιεί την  $L(\phi, \tilde{S})$  ή ισοδύναμα ελαχιστοποιεί τον εκθέτη. Δηλαδή

$$\arg \min_{\phi, \tilde{S}} S(\phi, \tilde{S})$$

όπου

$$S(\phi, \tilde{S}) = (x_1 - EF\tilde{S})^H (x_1 - EF\tilde{S}) + (x_2 - e^{j\frac{\phi}{2}} EFP\tilde{S})^H (x_2 - e^{j\frac{\phi}{2}} EFP\tilde{S})$$

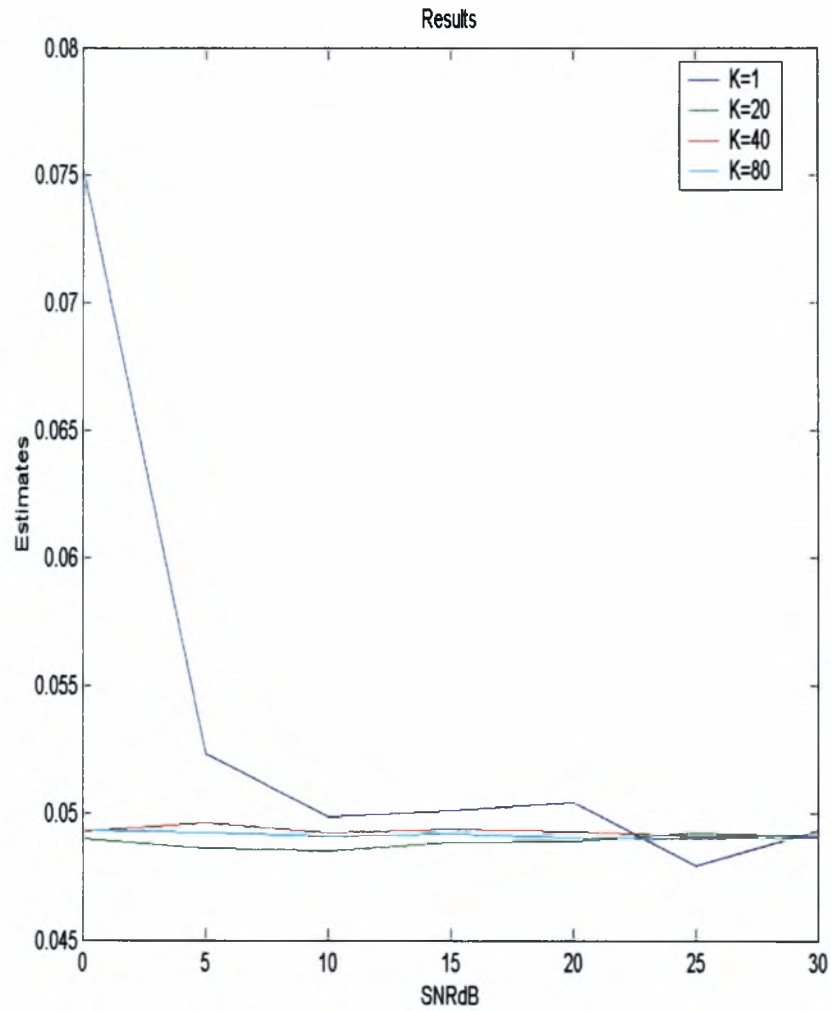
Υποθέτοντας δεδομένο  $\phi$ , αν μηδενίσουμε την παράγωγο προκύπτει  $\tilde{S}_{ML}(\phi)$  και αντικαθιστώντας πίσω στην  $S(\phi, \tilde{S})$  έχουμε

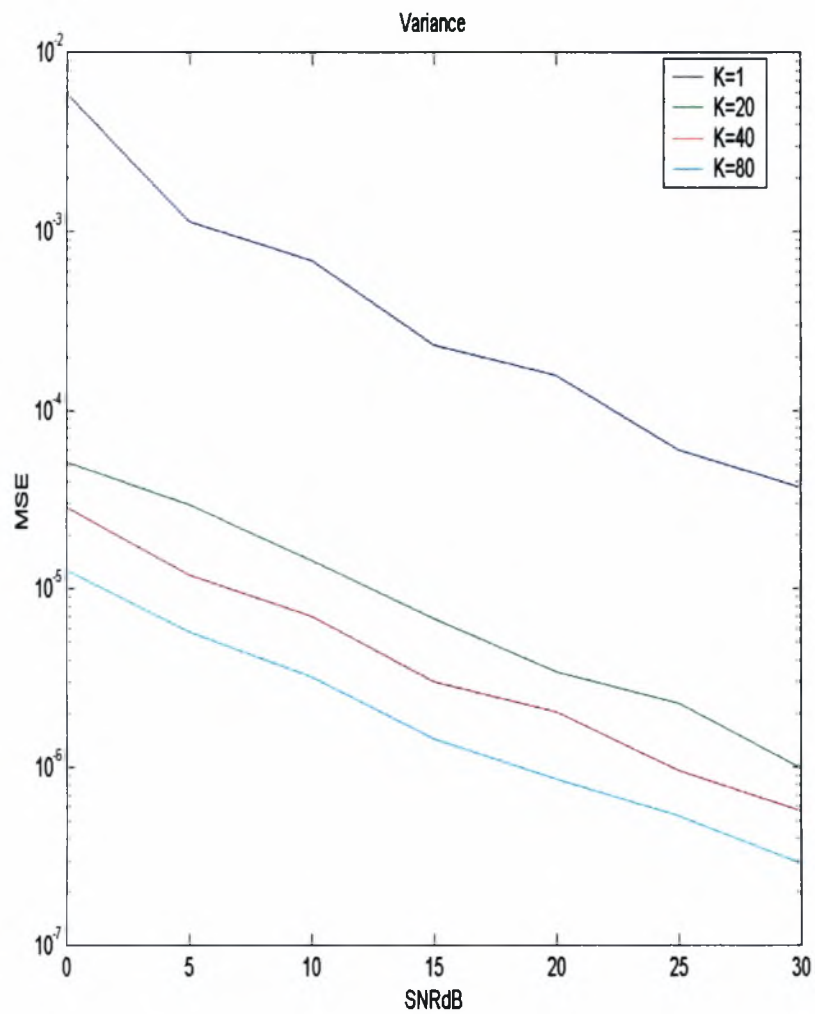
$$S(\phi, \tilde{S}_{ML}(\phi)) = \frac{1}{2} (y_1(\phi) - y_2(\phi))^H (y_1(\phi) - y_2(\phi))$$

Επομένως, στην περίπτωση παρουσίας θορύβου ο αλγόριθμος ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ των  $y_1$  και  $y_2$ , δηλ.

$$\min_{\phi} (y_1 - y_2)^H (y_1 - y_2)$$

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Έχουμε υποθέσει 32 subcarriers και CFO ίσο με 0.25 φορές το subcarrier spacing, δηλ.  $0.25 \frac{2\pi}{32} = 0.0491$ . Οι επόμενες γραφικές παραστάσεις δείχνουν τις εκτιμήσεις και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για διάφορους αριθμούς διαθέσιμων παρατηρήσεων. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι όσο ο αριθμός των διαθέσιμων παρατηρήσεων αυξάνει, τόσο πιο ακριβής γίνεται ο εκτιμητής.





## 5 ΑΝΑΦΟΡΕΣ

### References

- [1] ETSI, "Radio broadcasting systems: Digital Audio Broadcasting (DAB) to mobile, portable and fixed receivers," ETS 300 401, August 1997.
- [2] ETSI, "Digital Video Broadcasting (DVB): Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television," EN 300 744, August 1997.
- [3] MADDOCKS, M.C.D., 1993. An introduction to digital modulation and OFDM techniques. BBC Research Department Report No RD 1993/10.
- [4] John A. C. Bingham, "Multicarrier Modulation for Data Transmission: An Idea Whose Time Has Come," IEEE Communications Magazine, May 1990.
- [5] J. H. Stott, "The how and why of COFDM," EBU Technical Review - Winter 1998.
- [6] Thomas Keller, Lajos Hanzo, "Adaptive Multicarrier Modulation: A Convenient Framework for Time-Frequency Processing in Wireless Communications," IEEE Proc of the IEEE, vol. 88, no. 5, May 2000.
- [7] S. B. Weinstein, Paul M. Ebert, "Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform," IEEE Trans. on Communication Technology, vol. COM-19, no. 5, October 1971, pp. 628 - 634.
- [8] Robert Chang, "Synthesis of Band-Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission," The Bell System Technical Journal, December 1966, pp. 1775 - 1796.
- [9] J. H. Stott, "The effects of frequency errors in OFDM", BBC Research and Development Report no. RD 1995/15.
- [10] J. H. Stott, "The effects of phase noise in COFDM," EBU Technical Review, no. 276, Summer 1998.
- [11] Hongya Ge, Kun Wang, "Efficient Method for Carrier Offset Correction in OFDM Systems", IEEE 1999.
- [12] Thierry Pollet, Mark van Bladel, Marc Moeneclaey, "BER Sensitivity of OFDM Systems to Carrier Frequency Offset and Wiener Phase Noise," IEEE Trans. on Communications, vol. 43, no. 2/3/4, February/March/April 1995.

- 
- [13] Bertrand Muquet, Zhengdao Wang, Georgios B. Giannakis, Marc de Courville, Pierre Duhammel, "Cyclic Prefixing or Zero Padding for Wireless Multicarrier Transmissions?," IEEE Trans. on Communications, vol. 50, no. 12, December 2002.
  - [14] Ana Garcia Armada, Miguel Calco, "Phase Noise and Sub-Carrier Spacing Effects on the Performance of an OFDM Communication System," IEEE Communications Letters, vol. 2, no. 1, January 1998.
  - [15] Zhang Jianhua, Hermann Rohling, "Analysis of ICI Cancellation Scheme in OFDM Systems With Phase Noise."
  - [16] Ana Garcia Armada, "Understanding the Effects of Phase Noise in Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)," IEEE Trans. on Broadcasting, vol. 47, no 2, June 2001.
  - [17] Jean Armstrong, "Analysis of New and Existing Methods of Reducing Inter-carrier Interference Due to Carrier Frequency Offset in OFDM," IEEE Trans. on Communications, vol. 47, no. 3, March 1999.
  - [18] Hui Liu, Ufuk Tureli, "A High-Efficiency Carrier Estimator for OFDM Communications," IEEE Communications Letters, vol. 2, no. 4, April 1998.
  - [19] Biao Chen, "Maximum Likelihood Estimation of OFDM Carrier Frequency Offset," IEEE Signal Processing Letters, vol. 9, no. 4, April 2002.
  - [20] Samir Attalah, "Blind Estimation of Residual Carrier Offset in OFDM Systems," IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, no. 2, February 2004.
  - [21] Paul H. Moose, "A Technique for Orthogonal Frequency Division Multiplexing Frequency Offset Correction," IEEE Trans. on Communications, vol. 42, no. 10, October 1994.
  - [22] Jian Li, Guoqing Liu, Georgios B. Giannakis, "Carrier Frequency Offset Estimation for OFDM-Based WLANs," IEEE Signal Processing Letters, vol. 8, no. 3, March 2001.
  - [23] Raul A. Casas, Stephen L. Biracree, Andrew E. Youtz, "Time Domain Phase Noise Correction for OFDM Signals," IEEE Trans. on Broadcasting, vol. 48, no. 3, September 2002.
  - [24] Zhongsham Zhang, Ming Zhao, Haiyan Zhou, Yuanan Liu, Jinchun Gao, "Frequency Offset Estimation With Fast Acquisition in OFDM Systems," IEEE Communications Letters, vol. 8, no. 3, March 2004.

- [25] Jan-Jaap van de Beek, Magnus Sandell, Per Ola Borjesson, "ML Estimation of Time and Frequency Offset in OFDM Systems," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, no. 7, July 1997.
- [26] Navid Lashkarian, Sayfe Kiaei, "Class of Cyclic-Based Estimators for Frequency-Offset Estimation of OFDM Systems," IEEE Trans. on Communications, vol. 48, no. 12, December 2000.
- [27] Biao Chen, Hao Wang, "Blind OFDM Carrier Frequency Offset Estimation via Oversampling," IEEE 2001.
- [28] George Moustakides, "Introduction to Detection and Estimation theory".
- [29] George Moustakides, "Basic Techniques of Digital Signal Processing," Tziola publications.
- [30] Juha Heiskala, John Terry, "OFDM Wireless LANs: A Theoretical and Practical Guide".
- [31] Simon Haykin, "Communication Systems," 2nd. ed., Wiley, 1993.



## 6 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Εδώ θα υπολογίσουμε το SNR για το cyclic prefix και για το zero padding, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί σωστά στις προσομοιώσεις. Είναι γνωστό ότι το SNR δίνεται από

$$\text{SNR} = \frac{E_b}{N_0}$$

όπου  $E_b$  είναι η μέση ισχύς που απαιτείται για την μετάδοση ενός συμβόλου και  $N_0$  είναι η μέση ισχύς ενός δείγματος θορύβου.

Έστω  $d = [d_1 \dots d_K]^T$  το προς μετάδοση μπλοκ. Τότε η μέση συνολική μεταδιδόμενη ισχύς είναι

$$\begin{aligned} P &= E\left\{\sum_{i=1}^K |d_i|^2\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^K d_i d_i^*\right\} \\ &= E\{d^H d\} \\ &= E\{\text{trace}(d^H d)\} \\ &= E\{\text{trace}(dd^H)\} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση του CP, το  $d$  δίνεται από

$$d_{CP} = \begin{pmatrix} F_{CP}^H \\ F^H \end{pmatrix} S$$

όπου  $S = [s_1 \dots s_N]^T$ . Τότε, η μέση συνολική ισχύς που απαιτείται για την μετάδοση ολόκληρου του μπλοκ είναι

$$\begin{aligned} P_{CP} &= E\{\text{trace}(dd^H)\} \\ &= E\left\{\text{trace}\left(\begin{pmatrix} F_{CP}^H \\ F^H \end{pmatrix} SS^H \begin{pmatrix} F_{CP} & F \end{pmatrix}\right)\right\} \\ &= \text{trace}\left(\begin{pmatrix} F_{CP}^H \\ F^H \end{pmatrix} E\{SS^H\} \begin{pmatrix} F_{CP} & F \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{trace}\left(\begin{pmatrix} F_{CP}^H \\ F^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{CP} & F \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{trace}(I_K) \\ &= N + D \end{aligned}$$

Στην περίπτωση του zero padding, το  $d$  δίνεται από

$$d_{ZP} = \begin{pmatrix} F^H \\ 0 \end{pmatrix} S$$

Τότε,

$$\begin{aligned} P_{ZP} &= E\{\text{trace}(dd^H)\} \\ &= \text{trace}\left(\begin{pmatrix} F^H \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{trace}(I_N) \\ &= N \end{aligned}$$

Επομένως, διαιρώντας την συνολική μέση ισχύς με τον αριθμό των subcarriers που μεταφέρουν πληροφορία, δηλ.  $N$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{CP} &= \frac{1 + \frac{D}{N}}{\sigma^2} \\ \text{SNR}_{ZP} &= \frac{1}{\sigma^2} \end{aligned}$$

για cyclic prefix και zero padding αντίστοιχα.

Τώρα ας εξετάσουμε το SNR στην περίπτωση των virtual carriers. Τώρα  $S = [s_1 \dots s_p 0 \dots 0]^T$ , και

$$\begin{aligned} d_{CP} &= \begin{pmatrix} F_{CP_p}^H \\ F_p^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_p \end{pmatrix} \\ d_{ZP} &= \begin{pmatrix} F_p^H \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου  $F_{CP_p}^H$  και  $F_p^H$  είναι οι πρώτες  $p$  στήλες του  $F_{CP}^H$  και  $F^H$  αντίστοιχα.

Επομένως, για την τεχνική cyclic prefix ισχύει

$$\begin{aligned}
 P_{CP} &= \text{trace}\left(\begin{pmatrix} F_{CP_p}^H \\ F_p^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{CP_p} & F_p \end{pmatrix}\right) \\
 &= \text{trace}\left(\begin{pmatrix} F_{CP_p} & F_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{CP_p}^H \\ F_p^H \end{pmatrix}\right) \\
 &= \text{trace}(F_{CP_p} F_{CP_p}^H + I_p) \\
 &= P + \text{trace}(F_{CP_p} F_{CP_p}^H) \\
 &= P + \text{trace}(F_{CP_p}^H F_{CP_p}) \\
 &= P + \frac{DP}{N}
 \end{aligned}$$

και για την zero padding

$$\begin{aligned}
 P_{ZP} &= \text{trace}\left(\begin{pmatrix} F_p^H \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_p & 0 \end{pmatrix}\right) \\
 &= \text{trace}(F_p^H F_p) \\
 &= \text{trace}(F_p F_p^H) \\
 &= P
 \end{aligned}$$

Διαιρώντας με  $P$ , τον αριθμό των subcarriers που μεταφέρουν πληροφορία, προκύπτει

$$\begin{aligned}
 SNR_{CP} &= \frac{1 + \frac{D}{N}}{\sigma^2} \\
 SNR_{ZP} &= \frac{1}{\sigma^2}
 \end{aligned}$$

## 7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

VIRTUAL CARRIERS CP CODE

```

clear all; close all; clc;
%=====SETUP PARAMETERS
N = 32; %Number of subcarriers
P = 20; %Number of data streams
CP = 5; %CP length
B = 1; %Bandwidth (normalized in order the spacing to be 2*pi/N)
Df = B/N; %Subcarrier spacing in Hz
Dw = (2*pi)*Df; %Subcarrier spacing in rad/s
e = 0.75; %CFO in percent of subcarrier spacing
phi = e*Dw; %CFO in rad
SNRdB = [0:5:30]; SNR = 10.^(SNRdB/10);
var = (1+CP/N)/SNR/2; %Divide by 2 due to complex noise
%=====SETUP VECTORS
F = conj(dftmtx(N))/sqrt(N); %IDFT Matrix F = F_u|F_v
F_u = F(:,1:P); F_v = F(:,P+1:end);
h = [0.555 0.16 0.141 0.316] + i*[0.214 0.636 0.29 -0.114]; %Channel coefficients
D = diag(fft(h,N)); %Channel matrix. Diagonal due to FCF'=D where C circulant and F,F' orthonormal
D_u = D(1:P,1:P);
E = diag( exp(-i*phi*[0:N-1]), 0 ); %CFO Matrix
%=====CREATE DATA
[analog_in,Fs,bits] = wavread('in');
decimal_in = round(128*analog_in+127); %from [-1:1] to [0:255]
binary_in = zeros(1,8*length(decimal_in));
for j = 1:length(decimal_in)% from decimal to binary form
    binary_in((j-1)*8+1 : (j-1)*8+8) = decimal2binary(decimal_in(j));
end
polar_in = binary2polar(binary_in); % from binary to polar form
%=====TRANSMIT DATA
y = zeros(N,ceil(length(polar_in)/P));
for j=1:ceil(length(polar_in)/P) % for every block of data
    y(:,j) = exp(-i*phi*(N+2*CP)*(j-1)) * E * F * D * [ polar_in((j-1)*P+1 : (j-1)*P+P) zeros(1,N-P) ]';
end
%=====EVALUATE ALGORITHMS WITH NOISE
tic
M = 100; %Number of Monte Carlo runs
K = [20]; %Number of available observations
Music_results = zeros(length(K),length(var));
Music_MSE = zeros(size(Music_results));
ML_results = zeros(size(Music_results));
ML_MSE = zeros(size(Music_results));
Heu_results = zeros(size(Music_results));
Heu_MSE = zeros(size(Music_results));

for k=1:length(K)
    for v=1:length(var)
        Music_estimates = zeros(1,M);
        ML_estimates = zeros(1,M);
        Heu_estimates = zeros(1,M);
        Y = y + ( sqrt(var(v))*randn(size(y)) + i*sqrt(var(v))*randn(size(y)) ); %Add noise
        (k-1)*length(var)+v
        for m=1:M
            Yb = Y(:,1+(m-1)*K(k):m*K(k));
            YY = Yb*Yb';
            %-----MUSIC
            Coeff = zeros(1,2*N-1);
            for j=-(N-1):N-1
                Cj = diag(diag(YY,j),j);
                Coeff(2*N-(j+N)) = trace(F_v'*Cj*F_v);
            end
            r = roots(Coeff);
            mag = abs(r);
            pha = angle(r);
            dif = mag-1;
            dif(find(dif>0))=-1000;
            [val,pos] = max(dif);
            music_phi_est = pha(pos);
            %-----
        end
    end
end

```

```

Music_estimates(m) = music_phi_est;
%-----ML
VV = P_v*P_v';
Coeff1 = zeros(1,2*N-1);
for j=-(N-1):N-1
    Cj = diag(diag(VV,j),j);
    Coeff1(2*N-(j+N)) = trace(Yb'*Cj*Yb);
end
r2 = roots(Coeff1);
mag2 = abs(r2);
pha2 = angle(r2);
dif = mag2-1;
dif(find(dif>0))=-1000;
[val,pos] = max(dif);
ML_phi_est = pha2(pos);
%-----HEURISTIC
ML_estimates(m) = ML_phi_est;
angles=[0:1000]*0.25*pi/1000;
Cost_function=zeros(1,length(angles));
Cost_Function = real( Coeff(end:-1:1)*exp(-1*[-(N-1):(N-1)]'*angles) );
[val,pos] = min(Cost_Function);
Heu_phi_est = angles(pos);
%-----
Heu_estimates(m) = Heu_phi_est;
end
Music_results(k,v) = mean( (Music_estimates));
ML_results(k,v) = mean( (ML_estimates) );
Heu_results(k,v) = mean( (Heu_estimates) );

Music_MSE(k,v) = mean( ((Music_estimates)-phi).^2); %+ because music estimates -phi
ML_MSE(k,v) = mean( ((ML_estimates)-phi).^2 );
Heu_MSE(k,v) = mean( ((Heu_estimates)-phi).^2 );

end
end time=toc; disp('Simulation time=');time/60
%-----FIGURES
figure(1)
plot(SNRdB, Music_results(1,:), SNRdB, Music_results(2,:), SNRdB, Music_results(3,:), SNRdB, Music_results(4,:));
title('MUSIC Estimator');
legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('Estimates')

figure(2)
plot(SNRdB, ML_results(1,:), SNRdB, ML_results(2,:), SNRdB, ML_results(3,:), SNRdB, ML_results(4,:));
title('ML Estimator');
legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('Estimates')

figure(3)
plot(SNRdB, Heu_results(1,:), SNRdB, Heu_results(2,:), SNRdB, Heu_results(3,:), SNRdB, Heu_results(4,:));
title('HEU Estimator');
legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('Estimates')

figure(4)
plot(SNRdB, Music_MSE(1,:), SNRdB, Music_MSE(2,:), SNRdB, Music_MSE(3,:), SNRdB, Music_MSE(4,:));
title('MUSIC Variance');
legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('MSE')

figure(5)
plot(SNRdB, ML_MSE(1,:), SNRdB, ML_MSE(2,:), SNRdB, ML_MSE(3,:), SNRdB, ML_MSE(4,:));
title('ML Variance');
legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('MSE')

figure(6)
plot(SNRdB, Heu_MSE(1,:), SNRdB, Heu_MSE(2,:), SNRdB, Heu_MSE(3,:), SNRdB, Heu_MSE(4,:));
title('HEU Variance');

```

```

legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('MSE')
%-----
return
%-----RETRIEVE DATA
phi_est = Music_results(end,end); Z =
diag(exp(i*(phi_est*[0:N-1]),0); DS = N*F'*Z*y; Ds = DS(1:P,:); s
= (D_u'-1)*Ds ; binary_out = polar2binary( s(:) ); decimal_out =
zeros(1,length(binary_out)/8); for i = 1:length(decimal_out)
    decimal_out(i) = binary2decimal( binary_out(1 + (i-1)*8:(i-1)*8 + 8) );
end analog_out = (decimal_out-127)/128;
wavwrite(analog_out,Fs,bits,'out.wav');
%-----

VIRTUAL CARRIERS ZP CODE
%-----
%clear all; close all; clc;
%-----SETUP PARAMETERS
N = 32; %Number of subcarriers
P = 20; %Number of data streams
ZP = 5; %ZP length
L = 4; %Channel length
B = 1; %Bandwidth (normalized in order the spacing to be 2pi/N)
Df = B/N; %Subcarrier spacing in Hz
Dw = (2*pi)*Df; %Subcarrier spacing in rad/s
e = 0.75; %CFO in percent of subcarrier spacing
phi = e*Dw; %CFO in rad
SNRdB= [0:5:30];
SNR = 10.^(SNRdB/10);
var = (1)/SNR/2; %Divide by 2 due to complex noise
%-----
%-----SETUP VECTORS
F = conj(dftmtx(N))/sqrt(N); %IDFT Matrix F = F_u*F_v
F_u = F(:,P+1:end);
h = [0.555 0.16 0.141 0.316] + i*[0.214 0.636 0.29 -0.114]; %Channel coefficients
H = toeplitz([h zeros(1,N+ZP-L)], [h(1) zeros(1,N-1)]); % The channel's toeplitz matrix
E = diag( exp(i*phi*[0:N+ZP-1]),0 ); %CFO Matrix
%-----
%-----CREATE DATA
S = sign(rand(P,8000)-0.5);
S = [S;zeros(N-P,8000)];
%-----
%-----TRANSMIT DATA
y = E * H * F * S; % the exponential factor can be neglected because the algorithm uses yy'
%-----
%-----EVALUATE ALGORITHMS WITH NOISE
tic M = 100;
K = [20];
Heu_results = zeros(length(K),length(var));
Heu_MSE = zeros(size(Heu_results));

angles = [0:1000]*0.25*pi/1000;
evaluation_vectors = exp(i*[-(N-1):(N-1)]'*angles);

for k=1:length(K)
    for v=1:length(var)
        Heu_estimates = zeros(1,M);
        Y = y + ( sqrt(var(v))*randn(size(y)) + i*sqrt(var(v))*randn(size(y)) );
        (k-1)*length(var)+v
        for m=1:M
            %-----BLOCKS
            Yb = [ Y(:,1+(m-1)*K(k):m*K(k)) ; zeros(N-ZP,K(k)) ] ;
            YA = Yb(1:N,:);
            YB = Yb(N+1:end,:);
            %-----
            %-----CORRELATIONS
            YAA = YA*YA';
            YAB = YA*YB';
            YBA = YB*YA';
            YBB = YB*YB';
            %-----
            %-----Calculation of the polynomial coefficients

```

---

```

Coeff1 = zeros(1,2*N-1); Coeff2 = zeros(1,2*N-1); Coeff3 = zeros(1,2*N-1); Coeff4 = zeros(1,2*N-1);
for j=-(N-1):N-1
    Cj1 = diag(diag(YAA, j), j);
    Coeff1(j+N) = trace(F_v'*Cj1*F_v);
    Cj2 = diag(diag(YAB, j), j);
    Coeff2(j+N) = trace(F_v'*Cj2*F_v);
    Cj3 = diag(diag(YBA, j), j);
    Coeff3(j+N) = trace(F_v'*Cj3*F_v);
    Cj4 = diag(diag(YBB, j), j);
    Coeff4(j+N) = trace(F_v'*Cj4*F_v);
end
%-----HEURISTIC
Cost_function=zeros(1,length(angles));
Cost_Function = real( ( Coeff1 + Coeff4 ) * evaluation_vectors + ...
    ( Coeff2 * evaluation_vectors ) .* exp(i*angles*N) + ...
    ( Coeff3 * evaluation_vectors ) .* exp(-i*angles*N) );
[val,pos] = min(Cost_Function);
Heu_phi_est = angles(pos);
%-----
Heu_estimates(m) = Heu_phi_est;
end
Heu_results(k,v) = mean( Heu_estimates );
Heu_MSE(k,v) = mean( ((Heu_estimates)-phi).^2 );
end
end time=toc; disp('Simulation time=');time/60
%-----

```

---

## TRAINING SYMBOLS CODE

```

clear all; close all; clc;

%=====SETUP PARAMETERS
N = 32;           %Number of subcarriers
CP = 5;          %Length of CP
B = 1;           %Bandwidth (normalized in order the spacing to be 2pi/N)
Df = B/N;        %Subcarrier spacing in Hz
Dw = (2*pi)*Df;  %Subcarrier spacing in rad/s
SNRdB = [0:5:30];
SNR = 10.^(SNRdB/10);
var = (1+CP/N)./(SNR/2);

%=====SETUP VECTORS
F = conj(dftmtx(N))/sqrt(N);
h = [0.555 0.16 0.141 0.316] + 1*[0.214 0.636 0.29 -0.114]; %Channel coefficients
D = diag(fft(h,N)); %Channel matrix. Diagonal due to FCF'=D where C circulant and F,F' orthonormal

%=====CREATE DATA
S = sign(rand(1,N)-0.5)';

%=====EVALUATE ALGORITHM
M = 100;
e = [0.2:0.1:0.5];
results = zeros(length(e),length(var));
var_of_estimates = zeros(size(results));

for k=1:length(e)
    phi = e(k)*Dw;
    E = diag( exp(-i*phi*[0:N-1]),0 );
    for v=1:length(var)
        estimates = zeros(1,M);
        for j=1:M
            %=====TRANSMIT DATA
            Y1 = E*F*D*S + (sqrt(var(v))*randn(N,1)+i*sqrt(var(v))*randn(N,1));
            Y2 = exp(-i*phi*N)*E*F*D*S + (sqrt(var(v))*randn(N,1)+i*sqrt(var(v))*randn(N,1));
            %=====DEMODULATE DATA
            R1 = F'*Y1;
            R2 = F'*Y2;
            %=====CFO ESTIMATION
            est = (1/(2*pi)) * angle(sum(R1.*conj(R2)));
            estimates(j) = est;
        end
        results(k,v) = mean(estimates);
        var_of_estimates(k,v) = mean((estimates-e(k)).^2);
    end
end

%=====
figure(1)
plot(SNRdB, results(1,:), SNRdB, results(2,:), SNRdB, results(3,:), SNRdB, results(4,:));
title('Moose Estimator');
legend('e=0.2', 'e=0.3', 'e=0.4', 'e=0.5', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('Estimates')

figure(2)
plot(SNRdB, var_of_estimates(1,:), SNRdB, var_of_estimates(2,:), SNRdB, var_of_estimates(3,:), SNRdB, var_of_estimates(4,:));
title('Moose Variance');
legend('e=0.2', 'e=0.3', 'e=0.4', 'e=0.5', 4);
xlabel('SNRdB')
ylabel('MSE')

```



## CYCLIC PREFIX CODE (WITHOUT CHANNEL)

```

clear all; close all; clc;
%-----
K = 32;          %Number of data subcarriers
D = 5;          %Number of cyclic prefix
N = K+D;        %Number of subcarriers
L = 4;          %Channel length
Df = 1/K;       %Subcarrier spacing
Dw = 2*pi*Df;
e = 0.2;
phi = e*Dw;
SNRdB = [0:5:30];
SNR = 10.^(SNRdB/20);
var = (1+D/K)./SNR/2;
%-----
F = conj(dftmtx(K))/sqrt(K);
Fcp = [F((K-D+1):K,:); F];
h = [0.555 0.16 0.141 0.316] + i*[0.214 0.636 0.29 -0.114];
LC = toeplitz([h zeros(1,N-L) zeros(1,L-1)], [h(1) zeros(1,N-1)]);
H = LC(1:N,:); Hibi = [LC(N+1:N+L-1,:); zeros(N-(L-1),N)];
H = diag(ones(1,N),0);
Hibi = zeros(size(Hibi));
E = diag(exp(i*phi*[0:N-1]),0);
%-----
M = 200;
results = zeros(1,length(var));
var_of_estimates = zeros(size(results));

for v=1:length(var)
    estimates = zeros(1,M);
    for j=1:M
        S1 = sign(rand(1,K)-0.5);
        S2 = sign(rand(1,K)-0.5);
        Y = E*(H*Fcp*S2' + Hibi*Fcp*S1') + (sqrt(var(v))*randn(N,1)+i*sqrt(var(v))*randn(N,1));
        gamma = sum(Y(1:D).*conj(Y(N-D+1:N)));
        estimates(j) = -angle(gamma)/(2*pi);
    end
    results(v) = mean(estimates);
    var_of_estimates(v) = mean((estimates-e).^2);
end
%-----
figure(1)
plot(SNRdB, results)
title('CP Estimator')
xlabel('SNRdB')
ylabel('Estimates')

figure(2)
plot(SNRdB, var_of_estimates)
title('CP Variance')
xlabel('SNRdB')
ylabel('MSE')
%-----

```

## CYCLIC PREFIX CODE (WITH CHANNEL)

```

clear all; close all; clc;
%-----
K = 32;          %Number of data subcarriers
D = 5;          %Number of cyclic prefix
N = K+D;        %Number of subcarriers
L = 4;          %Channel length
Df = 1/K;       %Subcarrier spacing
Dw = 2*pi*Df;
e = 0.2;
phi = e*Dw;
SNRdB = [0:5:30];
SNR = 10.^(SNRdB/20);
var = (1+D/N)./SNR/2;
%-----
F = conj(dftmtx(K))/sqrt(K);
Fcp = [F((K-D+1):K,:); F];
h = [0.555 0.16 0.141 0.316] + i*[0.214 0.636 0.29 -0.114];

```

---

```

LC = toeplitz( [h zeros(1,N-L) zeros(1,L-1)] , [h(1) zeros(1,N-1)] );
H = LC(1:N,:);
Hibi= [LC(N+1:N+L-1,:); zeros(N-(L-1),N)];
E = diag(exp(i*phi*[0:N-1]),0);
%-----
M = 200;
results = zeros(1,length(var));
var_of_estimates = zeros(size(results));

for v=1:length(var)
    estimates = zeros(1,M);
    for j=1:M
        S1 = sign(rand(1,K)-0.5);
        S2 = sign(rand(1,K)-0.5);
        Y = E*(H*Fcp*S2' + Hibi*Fcp*S1') + (sqrt(var(v))*randn(N,1)+i*sqrt(var(v))*randn(N,1));
        gamma = sum( Y(1:D). *conj(Y(N-D+1:N)) );
        estimates(j) = -angle(gamma)/(2*pi);
    end
    results(v) = mean(estimates);
    var_of_estimates(v) = mean((estimates-e).^2);
end
%-----
figure(1)
plot(SNRdB, results)
title('CP Estimator')
xlabel('SNRdB')
ylabel('Estimates')

figure(2)
plot(SNRdB, var_of_estimates)
title('CP Variance')
xlabel('SNRdB')
ylabel('MSE')
%-----

```

---

## OVERSAMPLING CODE

```

clear all; close all; clc;

%=====SETUP PARAMETERS
N = 32;           %Number of subcarriers
D = 5;           %Length of CP
B = 1;           %Bandwidth (normalized in order the spacing to be 2pi/N)
Df = B/N;        %Subcarrier spacing in Hz
Dw = (2*pi)*Df;  %Subcarrier spacing in rad/s
e = 0.25;        %CFO in percent of subcarrier spacing
phi = e*Dw;      %CFO in rad
SNRdB = [0:5:30];
SNR = 10.^(SNRdB/20);
var = (1+D/N)./(SNR/2); %Divide by 2 due to complex noise

%=====SETUP VECTORS
F = conj(dftmtx(N))/sqrt(N); %IDFT Matrix F = F_u|F_v
h = [0.555 0.16 0.141 0.316] + i*[0.214 0.636 0.29 -0.114]; %Channel coefficients
D = diag(fft(h,N)); %Channel matrix. Diagonal due to FCF'=D where C circulant and F,F' orthonormal
E = diag(exp(i*pi/N*[0:N-1]),0);
P = diag(exp(i*phi*[0:N-1]),0); %CFO Matrix
W1 = F'*E'*F';
W2 = F'*E'*F';

%=====CREATE DATA
d = sign(rand(N,8000)-0.5);

%=====TRANSMIT DATA
s1 = P*F*D*d;
s2 = exp(i*phi/2)*P*F*E*D*d;

M = 100;
K = [1 20 40 80];
results = zeros(length(K),length(var));
MSE = zeros(size(results));
angles = [0:1000]*0.1*pi/1000;

tic
for k=1:length(K)
    for v=1:length(var)
        estimates = zeros(1,M);
        x1 = s1 + (sqrt(var(v))*randn(N,8000) + i*sqrt(var(v))*randn(N,8000));
        x2 = s2 + (sqrt(var(v))*randn(N,8000) + i*sqrt(var(v))*randn(N,8000));
        {k-1}*length(var)+v
        for m=1:M
            %-----Isolate the current block
            b1 = x1(:,1+(m-1)*K(k):m*K(k));
            b2 = x2(:,1+(m-1)*K(k):m*K(k));
            %-----
            Coeff1 = zeros(1,2*N-1);
            Coeff2 = zeros(1,2*N-1);
            for j=-(N-1):N-1
                C1j = diag(diag(W1,j),j);
                C2j = diag(diag(W2,j),j);
                Coeff1(j+N) = trace(b1'*C1j*b2);
                Coeff2(j+N) = trace(b2'*C2j*b1);
            end
            Cost_Function = real( trace(b1'*b1) + trace(b2'*b2)...
                - [(Ccoeff1*exp(i*[(N-1):-1:-(N-1)]'*angles)).*(exp(-i*angles/2))] ...
                - [(Ccoeff2*exp(i*[(N-1):-1:-(N-1)]'*angles)).*(exp(i*angles/2))] );
            [val,pos] = min(Cost_Function);
            estimates(m) = angles(pos);
        end
        results(k,v) = mean(estimates);
        MSE(k,v) = mean((estimates - phi).^2);
    end
end
time=toc; disp('Time passed'); time/60

%-----
figure(1)
plot(SNRdB, results(1,:), SNRdB, results(2,:), SNRdB, results(3,:), SNRdB, results(4,:))
legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
title('Results')
xlabel('SNRdB')
ylabel('Estimates')

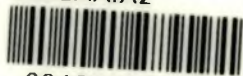
```

```
figure(2)
plot(SNRdB, MSE(1,:), SNRdB, MSE(2,:), SNRdB, MSE(3,:), SNRdB, MSE(4,:))
legend('K=1', 'K=20', 'K=40', 'K=80', 4);
title('Variance')
xlabel('SNRdB')
ylabel('MSE')
```

---



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074824